Géométrie repérée

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Géométrie · Géométrie repérée)

La démarche en géométrie repérée

1. Je vérifie le cadre : repère orthonormé, sinon ni longueurs ni orthogonalité en coordonnées.

2. Je traduis chaque objet par une équation : droite (vecteur normal et un point), cercle (centre et rayon).

3. Je choisis l'outil : vecteurs normaux pour comparer deux droites, système pour une intersection, perpendiculaire pour un projeté, compléter les carrés pour un cercle.

4. Je contrôle chaque résultat en remplaçant les coordonnées d'un point connu dans l'équation trouvée.

Le réflexe — une équation trouvée se contrôle toujours avec un point connu : ce contrôle, écrit sur la copie, attrape les erreurs de signe.

Cas 1 · Équation d'une droite avec un vecteur normal

Réflexe — vecteur normal (a ; b) → ax + by + c = 0 → c avec le point → contrôle.

Exemple. Questions types : « Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ ». Exemple : $A(-1\,;4)$ et $\vec{n}\,(2\,;-3)$.

$M(x\,;y)$ est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$:
$2(x+1)-3(y-4)=0$, soit $2x-3y+14=0$.
Contrôle avec A : $2\times(-1)-3\times4+14=0$.

Attention — (a ; b) est normal ; le vecteur directeur est (−b ; a).

Cas 2 · Parallèle, perpendiculaire, intersection

Réflexe — je compare les vecteurs normaux : déterminant nul → parallèles ; produit scalaire nul → perpendiculaires.

Exemple. Questions types : « Déterminer la perpendiculaire à d passant par B », « Les droites sont-elles parallèles ? ». Exemple : $d : x+4y-2=0$ et $B(2\,;1)$.

$(1\,;4)$ est normal à d, donc il dirige la perpendiculaire, qui a pour vecteur normal $(4\,;-1)$.
Équation $4x-y+c=0$; avec B : $8-1+c=0$, donc $c=-7$.
La perpendiculaire a pour équation $4x-y-7=0$. Contrôle : $(1\,;4)\cdot(4\,;-1)=4-4=0$.

Attention — garder (a ; b) donne une parallèle ; deux droites parallèles peuvent être confondues.

Cas 3 · Projeté orthogonal et distance

Réflexe — H = M + t·n, puis H ∈ d donne t ; ou perpendiculaire passant par M, puis système.

Exemple. Questions types : « Déterminer le projeté orthogonal H de M sur d, puis la distance de M à d ». Exemple : $M(0\,;5)$ et $d : 2x-y=0$.

$\vec{n}\,(2\,;-1)$ est normal à d : $H(2t\,;5-t)$.
$H\in d$: $4t-(5-t)=0$, soit $5t=5$, donc $t=1$ et $H(2\,;4)$. Contrôle : $4-4=0$.
Distance : $MH=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

Attention — vérifier que H est sur d ; une distance n'est jamais négative.

Cas 4 · Reconnaître un cercle

Réflexe — je regroupe x puis y, je complète les carrés, je regarde le signe du second membre.

Exemple. Questions types : « Montrer que l'ensemble d'équation … est un cercle, préciser son centre et son rayon ». Exemple : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.

$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ et $y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9$.
L'équation devient $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1 + 9 + 6 = 16$.
$16 > 0$: cercle de centre $\Omega(-1\,;3)$ et de rayon $\sqrt{16} = 4$.

Attention — signes du centre inversés ; le second membre est r², pas r.

Cas 5 · Intersection avec un cercle

Réflexe — distance du centre comparée au rayon pour prévoir, puis substitution et discriminant.

Exemple. Questions types : « Déterminer les points communs au cercle et à la droite ». Exemple : $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 10$ et $d : x - y - 2 = 0$.

Sur d, $y = x - 2$; on remplace : $x^2 + (x-2)^2 = 10$, soit $2x^2 - 4x - 6 = 0$, puis $x^2 - 2x - 3 = 0$.
$\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$: $x = 3$ ou $x = -1$.
Avec $y = x - 2$: les points communs sont $(3\,;1)$ et $(-1\,;-3)$.

Attention — calculer y avec l'équation de la droite ; avec $y = x^2$, rejeter les $y < 0$.

Les pièges

- Le vecteur (a ; b) est normal à ax + by + c = 0 ; le vecteur directeur est (−b ; a).
- Les formules de longueur et le test $xx' + yy' = 0$ supposent un repère orthonormé.
- Centre de $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$: (−4 ; 7), les signes s'inversent.
- $r^2 = 18$ donne $r = 3\sqrt{2}$; un second membre nul ou négatif ne donne pas de cercle.
- Une distance s'écrit avec une valeur absolue : elle n'est jamais négative.
- Avec $y = x^2$, une solution $y < 0$ est rejetée et chaque $y > 0$ donne deux points.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).