

Corrigé et barème – Géométrie dans le plan et le repère

Vecteurs, droites, cercles et transformations dans le plan cartésien — programme de Spécialité Maths 1re

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Points, vecteurs et configuration

(4 pts)

- a) $\vec{AB}(6; -8)$ donc $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$; $I\left(\frac{-5+1}{2}; \frac{3-5}{2}\right) = I(-2; -1)$. (1)
- b) $\vec{AC}(9; -3)$; déterminant $6 \times (-3) - (-8) \times 9 = -18 + 72 = 54 \neq 0$: les points ne sont pas alignés. (1)
- c) $\vec{CA}(-9; 3)$ et $\vec{CB}(-3; -5)$: $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 27 - 15 = 12 \neq 0$, donc le triangle n'est pas rectangle en C . (1)
- d) $ABDC$ parallélogramme $\iff \vec{AB} = \vec{CD}$, donc $D(4 + 6; 0 - 8) = D(10; -8)$. (1)

Erreur fréquente — Un déterminant nul signifie « alignés », un produit scalaire nul signifie « perpendiculaires » : les deux tests ne répondent pas à la même question.

Exercice 2 – Droites parallèles et perpendiculaires

(4 pts)

- a) Vecteur normal $\vec{n}(7; -2)$; vecteur directeur $\vec{u}(2; 7)$ (car $(-b; a)$), et $7 \times 2 - 2 \times 7 = 0$ confirme l'orthogonalité. (1)
- b) Même vecteur normal : $7(x - 3) - 2(y + 4) = 0$, soit $7x - 2y - 29 = 0$. (1)
- c) Le vecteur normal devient $(2; 7)$: $2(x - 3) + 7(y + 4) = 0$, soit $2x + 7y + 22 = 0$. (1)
- d) $7 \times (-4) - (-2) \times 14 = -28 + 28 = 0$: les droites sont parallèles. Elles ne sont pas confondues, car $2 \times (7x - 2y + 9) = 14x - 4y + 18 \neq 14x - 4y - 1$: elles sont strictement parallèles. (1)

Repère — Deux droites parallèles ont des équations proportionnelles ; si la proportionnalité échoue sur le seul terme constant, elles sont parallèles distinctes.

Exercice 3 – Distance, projeté orthogonal et tangence

(4 pts)

- a) $\frac{|4 \times 9 - 3 \times 7 - 12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|36-21-12|}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$. (1)
- b) $H = M - \frac{3}{25} \vec{n}$ avec $\vec{n}(4; -3)$: $H\left(9 - \frac{12}{25}; 7 + \frac{9}{25}\right) = H\left(\frac{213}{25}; \frac{184}{25}\right) = (8,52; 7,36)$. Contrôle : $4 \times 8,52 - 3 \times 7,36 - 12 = 0$. (1)
- c) Non : $0,5 < 0,6$, donc tous les points de d sont à une distance de M supérieure au rayon ; le cercle et la droite n'ont aucun point commun. (1)
- d) La tangence impose $r = \text{dist}(M; d) = 0,6$, d'où $(x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 0,36$. (1)

Attention — La distance d'un point à une droite se compare au rayon : plus petite, la droite coupe ; égale, elle est tangente ; plus grande, elle évite le cercle.

Exercice 4 – Étude d'un cercle

(4 pts)

- a) $(x+2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 20 = 0$, soit $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9 > 0$: cercle de centre $\Omega(-2; 5)$ et de rayon 3. (1)
- b) $(1+2)^2 + (5-5)^2 = 9$: oui, R appartient à $\mathcal{C}$. (1)
- c) $\vec{\Omega R}(3; 0)$ est normal à la tangente : $3(x-1) + 0 \times (y-5) = 0$, soit $x-1 = 0$: la tangente est verticale. (1)
- d) Pour $x = 0$: $4 + (y-5)^2 = 9$, donc $(y-5)^2 = 5$ et $y = 5 \pm \sqrt{5}$. Les points sont $(0; 5 + \sqrt{5})$ et $(0; 5 - \sqrt{5})$, soit environ $(0; 7,24)$ et $(0; 2,76)$. (1)

Le point clé — Après complétion des carrés, il faut toujours contrôler le signe du second membre avant de parler de cercle.

Exercice 5 – Une famille de droites horizontales

(4 pts)

- a) $(x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 - 23 = 0$, soit $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$: centre $\Omega(1; 1)$ et rayon $\sqrt{25} = 5$. (1)
- b) $\text{dist}(\Omega; y = t) = |t - 1|$; deux points distincts $\iff |t - 1| < 5 \iff -4 < t < 6$. (1)
- c) Pour $t = 6$, $|6 - 1| = 5$ est égal au rayon, et non inférieur : la droite est tangente à Γ et n'a qu'un seul point commun, $(1; 6)$. L'élève a confondu l'inégalité stricte avec une inégalité large en oubliant le cas de tangence. (1)
- d) Pour $y = -2$: $(x-1)^2 + 9 = 25$, donc $(x-1)^2 = 16$ et $x-1 = \pm 4$: les points sont $(5; -2)$ et $(-3; -2)$. (1)

À retenir — Les cas limites d'une intersection se lisent sur une inégalité stricte : l'égalité $\text{dist} = r$ correspond exactement à la tangente.