Fonction exponentielle

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Analyse · Fonction exponentielle)

La démarche devant une exponentielle

1. Je repère ce qu'on me demande : simplifier, résoudre, dériver, étudier un signe ou des variations, passer à une suite.

2. Je regroupe en un seul exposant avec les règles (produit → somme, quotient → différence, puissance → produit).

3. J'utilise les deux propriétés clés : $e^u > 0$ (le signe ne change pas) et exp strictement croissante ($e^A < e^B \iff A < B$).

4. Je conclus en citant la propriété utilisée et en donnant un ensemble de solutions, un tableau de variations ou une raison.

Le réflexe — les phrases « car $e^x > 0$ » et « car l'exponentielle est strictement croissante » rapportent des points : sans elles, le passage aux exposants ou l'étude de signe n'est pas justifié.

Cas 1 · Signe et équation sans solution

Réflexe — une exponentielle est toujours strictement positive : eˆu = c n'a pas de solution si c ≤ 0.

Exemple. Questions types : « Résoudre », « Donner le signe ». Exemple : résoudre $3e^x + 7 = 0$.

$3e^x + 7 = 0 \iff e^x = -\dfrac{7}{3}$.

Or $e^x > 0$ pour tout réel x : il ne peut pas valoir un nombre négatif.

L'équation n'a aucune solution : $S = \varnothing$.

Attention — e^{-x} est positif : le « moins » porte sur l'exposant.

Cas 2 · Simplifier

Réflexe — puissances d'abord, puis un seul exposant, réduit avec des parenthèses autour de ce qu'on soustrait.

Exemple. Questions types : « Écrire sous la forme e^{ax+b} ». Exemple : $B = \dfrac{e^{4x} \times \left(e^{-x}\right)^2}{e^{x-3}}$.

$\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-2x}$.

$B = e^{4x-2x-(x-3)}$.

$B = e^{x+3}$.

Attention — eˆa + eˆb ne se simplifie pas ; $(e^x)^2 = e^{2x}$, pas $e^{(x^2)}$.

Cas 3 · Équation ou inéquation

Réflexe — chaque membre sous la forme eˆ…, passage aux exposants (exp strictement croissante), résolution, ensemble de solutions.

Exemple. Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ ». Exemple : $e^{x^2} \leqslant e^{x+2}$.

L'exponentielle est strictement croissante : $e^{x^2} \leqslant e^{x+2} \iff x^2 \leqslant x + 2 \iff x^2 - x - 2 \leqslant 0$.

Le trinôme a pour racines -1 et 2 ; il est négatif entre ses racines.

$S = [-1\,;2]$.

Attention — après $X = e^x$, une racine $X \leq 0$ est écartée ; diviser par un négatif change le sens.

Cas 4 · Étudier une fonction

Réflexe — dériver, factoriser par l'exponentielle, signe du facteur restant, tableau, extremum exact.

Exemple. Questions types : « Montrer que $f'(x) = \ldots$ », « Dresser le tableau de variations ». Exemple : $f(x) = (4 - x)e^x$.

$f'(x) = -1 \times e^x + (4 - x)e^x = (3 - x)e^x$.
$e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $3 - x$: positif avant 3, négatif après.
f est croissante sur $]-\infty\,;3]$, décroissante sur $[3\,;+\infty[$; maximum $f(3) = e^3$.

Attention — (e^(at))′ = a e^(at) : le coefficient sort devant.

Cas 5 · Passer à une suite géométrique

Réflexe — $u_n = K\,e^{(an)}$, $u_{n+1} = e^a\,u_n$, raison e^a, taux $(e^a - 1) \times 100$ %.

Exemple. Questions types : « Montrer que (u_n) est géométrique », « Interpréter la raison ». Exemple : $h(t) = 60\,e^{-0{,}2t}$, avec $e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$.

$u_n = h(n) = 60\,e^{-0{,}2n}$ et $u_{n+1} = 60\,e^{-0{,}2n} \times e^{-0{,}2} = e^{-0{,}2}\,u_n$.
(u_n) est géométrique de raison $e^{-0{,}2} \approx 0{,}819$, de premier terme 60.
Taux : $(0{,}819 - 1) \times 100 = -18{,}1$: baisse d'environ 18,1 % par unité de temps.

Attention — le taux n'est pas le coefficient de l'exposant : −18,1 % et non −20 %.

Les pièges

- e^x n'est pas $e \times x$: $e^2 \approx 7{,}389$ alors que $2e \approx 5{,}437$.
- $e^{(a+b)} = e^a \times e^b$, jamais $e^a + e^b$.
- $e^x = 4$ a une solution (vue en Terminale), mais $e^x = -4$ n'en a aucune.
- Le signe de f se lit sur f, le sens de variation sur f′ : ne pas confondre.
- f′ = f ne suffit pas à reconnaître exp : il faut aussi f(0) = 1.
- Une décroissance exponentielle $K\,e^{(-kt)}$ n'atteint jamais 0.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).