

Devoir surveillé – Fonction exponentielle

Définition par l'équation $f' = f$, propriétés algébriques, variations, lien avec les suites géométriques
(programme 2026 de première spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Simplifier avec un seul exposant

(4 pts)

a) $e^5 \times e^{-12}$

c) $(e^{-x})^4 \times e^{9x}$

b) $\frac{e^{2x}}{e^{5x-3}}$

d) $\frac{e^{x+7} \times e^{-2x}}{e^4}$

Exercice 2 – Équations et inéquations

(4 pts)

a) Résoudre $e^{7x-2} = e^{3x+14}$.

b) Résoudre $e^{x^2+x} = e^6$.

c) Résoudre $e^{-4x} \leq e^{12}$.

d) Résoudre $e^{2x} - 15e^x + 54 = 0$ et donner les solutions arrondies au millièm.

Exercice 3 – Étude d'une fonction produit

(4 pts)

a) Soit f définie sur $[-6; 2]$ par $f(x) = (x+5)e^{-x}$.

a) Montrer que $f'(x) = (-x-4)e^{-x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[-6; 2]$.

c) Donner la valeur exacte du maximum de f , puis sa valeur arrondie au centièm.

d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 4 – Population de poissons

(4 pts)

a) Le nombre de poissons d'un lac est modélisé par $P(t) = 3\,200 e^{-0,12t}$, où t désigne le temps en années depuis 2026.

a) Calculer le nombre de poissons en 2026 et en 2030, arrondi à l'unité.

b) On pose $p_n = P(n)$. Montrer que (p_n) est géométrique et donner sa raison arrondie au millièm.

c) En déduire le pourcentage de diminution annuelle, arrondi au dixièm.

d) Déterminer la première année où la population passe sous la barre des 1 000 poissons, en justifiant par deux calculs.

Exercice 5 – Vrai, faux, et erreurs à corriger*(4 pts)*

- a) a) L'affirmation « pour tout réel x , $e^x > x + 1$ » est-elle vraie ? Justifier.
- b) b) L'affirmation « la fonction $x \mapsto e^{-0,7x}$ est décroissante, donc elle prend des valeurs négatives » est-elle vraie ? Justifier.
- c) c) Un élève écrit : « $e^{2x} + e^x = e^{3x}$ car $2x + x = 3x$ ». Expliquer son erreur et donner un contre-exemple chiffré.
- d) d) Montrer que pour tout réel x , $\frac{e^x}{e^x + 1} < 1$.

Bon courage !