

Corrigé et barème – Fonction exponentielle

Définition par l'équation $f' = f$, propriétés algébriques, variations, lien avec les suites géométriques
(programme 2026 de première spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Simplifier avec un seul exposant

(4 pts)

- a) $e^{5-12} = e^{-7}$ (1)
- b) $e^{2x-(5x-3)} = e^{3-3x}$ (1)
- c) $e^{-4x} \times e^{9x} = e^{5x}$ (1)
- d) $e^{(x+7)+(-2x)-4} = e^{3-x}$ (1)

Repère — Un produit additionne les exposants, un quotient les soustrait, une puissance les multiplie : tout se ramène à un seul exposant que l'on réduit.

Exercice 2 – Équations et inéquations

(4 pts)

- a) $7x - 2 = 3x + 14$ donc $4x = 16$ et $x = 4$: $S = \{4\}$. (1)
- b) $x^2 + x = 6$ soit $x^2 + x - 6 = 0$; $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\frac{-1-5}{2} = -3$ et $\frac{-1+5}{2} = 2$: $S = \{-3; 2\}$. (1)
- c) $-4x \leq 12$; en divisant par $-4 < 0$ le sens change : $x \geq -3$, donc $S = [-3; +\infty[$. (1)
- d) On pose $X = e^x > 0$: $X^2 - 15X + 54 = 0$, $\Delta = 225 - 216 = 9$, racines $X = 6$ et $X = 9$, toutes deux positives. Donc $e^x = 6$ ou $e^x = 9$, soit $x \approx 1,792$ ou $x \approx 2,197$. (1)

Attention — Le passage aux exposants conserve le sens de l'inégalité ; c'est la division par un nombre négatif qui le renverse.

Exercice 3 – Étude d'une fonction produit

(4 pts)

- a) f est un produit : $u(x) = x + 5$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$. Donc $f'(x) = e^{-x} + (x + 5) \times (-e^{-x}) = (1 - x - 5)e^{-x} = (-x - 4)e^{-x}$. (1)
- b) $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $-x - 4$: positif pour $x < -4$, nul en -4 , négatif pour $x > -4$. f est croissante sur $[-6; -4]$ puis décroissante sur $[-4; 2]$, avec $f(-6) = -e^6 \approx -403,43$ et $f(2) = 7e^{-2} \approx 0,95$. (1)
- c) Le maximum est atteint en $x = -4$: $f(-4) = (-4 + 5)e^4 = e^4 \approx 54,60$. (1)
- d) $f(0) = 5$ et $f'(0) = (-0 - 4)e^0 = -4$, d'où $y = -4(x - 0) + 5$, soit $y = -4x + 5$. (1)

Le point clé — Après dérivation d'un produit, on factorise par l'exponentielle : comme elle est strictement positive, seul le facteur restant fixe le signe.

Exercice 4 – Population de poissons*(4 pts)*

- a) $P(0) = 3\,200 e^0 = 3\,200$ poissons en 2026. En 2030, $t = 4$: $P(4) = 3\,200 e^{-0,48} \approx 3\,200 \times 0,61878 \approx 1\,980$ poissons. (1)
- b) $p_{n+1} = 3\,200 e^{-0,12(n+1)} = 3\,200 e^{-0,12n} \times e^{-0,12} = e^{-0,12} p_n$: la suite est géométrique de raison $q = e^{-0,12} \approx 0,887$ et de premier terme $p_0 = 3\,200$. (1)
- c) Le taux d'évolution vaut $(q - 1) \times 100 \approx (0,8869 - 1) \times 100 \approx -11,3$: la population diminue d'environ 11,3 % par an (et non de 12 %). (1)
- d) $P(9) = 3\,200 e^{-1,08} \approx 1\,087 > 1\,000$ et $P(10) = 3\,200 e^{-1,2} \approx 964 < 1\,000$. Comme P est strictement décroissante, le seuil est franchi pour $t = 10$, soit en **2036**. (1)

Erreur fréquente — La raison d'un modèle Ke^{at} est e^a , pas $1 + a$: un coefficient $-0,12$ ne signifie pas une baisse de 12 %.

Exercice 5 – Vrai, faux, et erreurs à corriger*(4 pts)*

- a) Fausse. Pour $x = 0$: $e^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$, donc il y a égalité et non inégalité stricte. L'affirmation correcte est $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x , la droite $y = x + 1$ étant la tangente à la courbe en 0. (1)
- b) Fausse. La fonction est bien strictement décroissante car sa dérivée $-0,7 e^{-0,7x}$ est strictement négative, mais toute exponentielle est strictement positive : $e^{-0,7x} > 0$ pour tout x . Décroissante ne veut pas dire négative. (1)
- c) L'exponentielle transforme les produits en sommes d'exposants, jamais les sommes en sommes d'exposants : la règle utilisable est $e^{2x} \times e^x = e^{3x}$. Contre-exemple : pour $x = 0$, $e^0 + e^0 = 2$ alors que $e^0 = 1$. (1)
- d) Pour tout réel x , $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > e^x > 0$. En divisant les deux membres de $e^x < e^x + 1$ par le nombre strictement positif $e^x + 1$, le sens est conservé : $\frac{e^x}{e^x + 1} < 1$. (1)

À retenir — Positivité, sens de variation et signe de la dérivée sont trois notions distinctes : un contre-exemple chiffré suffit à invalider une affirmation générale.