

Devoir surveillé – Échantillonnage et estimation

Échantillon, fluctuation d'échantillonnage, simulation et intervalle de fluctuation au seuil de 95 %
(programme de 1re générale, spécialité maths)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Satisfaction des clients

(4 pts)

- a) a) Une enseigne annonce que 40 % de ses clients se déclarent « très satisfaits ». Sur un échantillon de 80 clients pris au hasard, 34 se déclarent très satisfaits. Calculer la fréquence observée.
- b) b) Vérifier que les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % sont remplies.
- c) c) Déterminer cet intervalle, bornes arrondies au millième de façon à élargir l'intervalle.
- d) d) L'enquête remet-elle en cause l'annonce de l'enseigne au seuil de 95 % ? Rédiger la conclusion.

Exercice 2 – Longueur moyenne en atelier

(4 pts)

- a) a) Des tiges usinées ont pour longueur moyenne $\mu = 17,5$ cm et pour écart-type $\sigma = 3,5$ cm. Pour des échantillons de 784 tiges, calculer $dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.
- b) b) En déduire l'intervalle donné par la règle des deux écarts-types.
- c) c) La longueur moyenne relevée sur un échantillon est de 17,82 cm. Conclure.
- d) d) L'atelier passe à des échantillons de 3136 tiges. Déterminer le nouvel intervalle, puis reprendre la conclusion de la question c).

Exercice 3 – Dimensionner une enquête

(4 pts)

- a) a) Exprimer, en fonction de la taille n de l'échantillon, l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.
- b) b) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle cette amplitude est inférieure ou égale à 0,04. Détailler la résolution.
- c) c) Une administration annonce que 34 % des dossiers sont traités en moins d'une semaine. Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour la valeur de n trouvée en b).
- d) d) Sur cet échantillon, 907 dossiers ont été traités en moins d'une semaine. Conclure quant à l'annonce de l'administration.

Exercice 4 – Simuler des moyennes d'échantillons

(4 pts)

- a) On étudie une grandeur de moyenne 30 et d'écart-type 5. La fonction *gauss*(30, 5) renvoie une valeur simulée de cette grandeur.

```
def moyenne(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + gauss(30, 5)
    return s / n

def compte(N, n):
    c = 0
    for i in range(N):
        if abs(moyenne(n) - 30) <= 10 / n ** 0.5:
            c = c + 1
    return c / N
```

- a) Que représente la valeur renvoyée par l'appel *moyenne*(361) ?
- b) Traduire en écriture mathématique la condition testée dans la fonction *compte*, et expliquer d'où vient le nombre 10.
- c) Quelle valeur approchée doit renvoyer l'appel *compte*(1500, 361) ? Justifier.
- d) Deux exécutions successives de *compte*(1500, 361) renvoient 0,948 puis 0,953. Expliquer cette différence.

Exercice 5 – Trois copies à corriger

(4 pts)

- a) Un élève écrit que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est $\left[p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n}\right]$. Expliquer l'erreur et donner la formule correcte.
- b) Un élève affirme : « au seuil de 95 %, cela veut dire que 95 % des individus de l'échantillon possèdent le caractère ». Expliquer l'erreur.
- c) Un élève affirme que, si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation, alors la proportion de la population est égale à cette fréquence. Expliquer l'erreur.
- d) Application. Une pièce est supposée équilibrée ($p = 0,50$). Sur 121 lancers, on obtient 71 fois « pile ». Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, bornes arrondies au millième en l'élargissant, puis conclure.

Bon courage !