

Corrigé et barème – Échantillonnage et estimation

Échantillon, fluctuation d'échantillonnage, simulation et intervalle de fluctuation au seuil de 95 %
(programme de 1re générale, spécialité maths)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Satisfaction des clients

(4 pts)

- a) $f = \frac{3480}{80} = 0,425$. (1)
- b) $n = 80$
 $0,25 \leq p \leq 0,2$
 $0,4 \leq p \leq 0,8$: les deux conditions sont vérifiées. (1)
- c) $\frac{1}{\sqrt{80}}$
 $\approx 0,111803$; bornes exactes 0,288197 et 0,511803, d'où $I = [0,288, 0,512]$. (1)
- d) 0,288
 $0,425 \leq p \leq 0,512$ donc $f \in I$: l'enquête ne remet pas en cause l'annonce au seuil de 95 %. (1)

Erreur fréquente — L'intervalle se construit autour de la proportion annoncée p , jamais autour de la fréquence observée.

Exercice 2 – Longueur moyenne en atelier*(4 pts)*a) $\sqrt{784} = 28$ donc

$$\frac{2 \times 3,528}{728} =$$

$$\frac{7}{28} = 0,25. \quad (1)$$

b) [

$$, 17,5 - 0,25$$

;;

$$; 17,5 + 0,25$$

$$,] = [$$

$$, 17,25$$

;;

$$; 17,75$$

$$,] \text{ (en cm)}. \quad (1)$$

c) $17,82 > 17,75$: la moyenne relevée sort de l'intervalle, le réglage de la machine doit être contrôlé.

(1)

d) $\sqrt{3136} = 56$ et

$$\frac{756}{728} = 0,125, \text{ d'où } [$$

$$, 17,375$$

;;

$$; 17,625$$

$$,] ; 17,82 \text{ en sort encore, la conclusion est confirmée et renforcée. } \quad (1)$$

Repère — Quadrupler la taille de l'échantillon divise par 2 la demi-amplitude : le contrôle détecte des dérives plus fines.

Exercice 3 – Dimensionner une enquête

(4 pts)

- a) Amplitude =
 $\frac{1}{\sqrt{n}} \left(p + \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$, indépendante de p . (1)
- b) $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04$
 $\iff \sqrt{n} \geq 50$
 $\iff n \geq 2500$; plus petite valeur : $n = 2500$. (1)
- c) Conditions vérifiées ;
 $\sqrt{2500} = 50$ et
 $\frac{1}{50} = 0,02$, d'où $I = [0,02, 0,32]$;
 $0,36$;
 $0,36$;
 $0,36$. (1)
- d) $f = \frac{907}{2500} = 0,3628 > 0,36$ donc f
 $\notin I$: l'annonce est rejetée au seuil de 95 %. (1)

Le point clé — L'amplitude ne dépend que de n : on peut donc dimensionner une enquête avant même de connaître la proportion.

Exercice 4 – Simuler des moyennes d'échantillons

(4 pts)

- a) La moyenne des 361 valeurs simulées, c'est-à-dire la moyenne d'un échantillon de taille 361 prélevé dans cette population. (1)
- b) La condition s'écrit $|m - 30| \leq \frac{10}{\sqrt{n}}$; le nombre 10 vaut 2
 $\sigma = 2$
 $\times 5$, donc la condition est $|m - \mu| \leq \frac{10}{\sqrt{n}}$. (1)
- c) Une valeur proche de 0,95 : d'après la règle des deux écarts-types, environ 95 % des moyennes d'échantillons vérifient cette condition. (1)
- d) La valeur renvoyée est elle-même une fréquence observée sur 1500 simulations : elle fluctue d'une exécution à l'autre et ne se stabilise que si N augmente. (1)

Attention — Une simulation illustre la propriété et ne la démontre pas : ses résultats fluctuent eux aussi.

Exercice 5 – Trois copies à corriger*(4 pts)*

- a) La demi-amplitude est $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et non $\frac{1}{n}$: l'élève obtient un intervalle beaucoup trop étroit. Formule correcte : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. (1)
- b) Le seuil porte sur les échantillons, non sur les individus : si l'hypothèse est vraie, environ 95 échantillons sur 100 donnent une fréquence dans l'intervalle. (1)
- c) Appartenir à l'intervalle signifie seulement que l'observation est compatible avec l'hypothèse ; cela ne démontre aucune égalité entre p et f . (1)
- d) $\sqrt{121} = 11$ et $\frac{1}{11} \approx 0,090909$: $I = [0,409; 0,591]$. Or $f = \frac{7}{121} \approx 0,0587$ $\notin I$: on ne rejette pas l'hypothèse d'une pièce équilibrée. (1)

À retenir — Un test statistique ne prouve jamais une hypothèse : il indique seulement si l'observation est surprenante ou non.