

Devoir surveillé – Suites numériques, arithmétiques et géométriques — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Soit q un réel différent de 1 et $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Calculer $S - qS$ et en déduire que $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- b) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . En admettant que $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, démontrer que $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.
- c) Soit (v_n) une suite géométrique de raison q . Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $v_n^2 = v_{n-1} \times v_{n+1}$.
- d) Déterminer le réel x tel que $x - 1$, $x + 2$ et $x + 8$ soient, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Préciser la raison.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier.

- a) « Si (u_n) et (v_n) sont géométriques, alors la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique. »
 - a) « Si (u_n) et (v_n) sont géométriques, alors la suite $(u_n \times v_n)$ est géométrique. »
 - b) « Une suite à la fois arithmétique et géométrique est constante. »
 - c) « Si $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^n}$, alors $u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. »

Exercice 3 – Problème — Un lac trop pêché

(5 pts)

Au 1er janvier 2027, un lac compte 2 000 poissons. Chaque année, la population augmente naturellement de 10 %, puis on prélève 300 poissons par la pêche. On note p_n le nombre de poissons au 1er janvier de l'année 2027 + n , avec $p_0 = 2\,000$.

- a) Justifier que $p_{n+1} = 1,1 p_n - 300$, puis calculer p_1 et p_2 .
 - a) Déterminer le réel ℓ tel que la suite $(p_n - \ell)$ soit géométrique. En déduire p_n en fonction de n .
 - b) Étudier le sens de variation de la suite (p_n) .
 - c) Au cours de quelle année la pêche prévue devient-elle impossible ? Justifier.
 - d) On prélève désormais c poissons par an ($c > 0$), toujours avec $p_0 = 2\,000$. Déterminer, selon les valeurs de c , l'évolution de la population, et le prélèvement annuel maximal qui empêche la population de diminuer.

Exercice 4 – Problème — Un tapis troué**(5 pts)**

On part d'un carré plein de côté 1 (étape 0). À l'étape 1, on le découpe en 9 carrés égaux et on retire celui du centre. À chaque étape suivante, on applique la même opération à chacun des carrés pleins restants.

- a) Justifier qu'à l'étape n ($n \geq 1$), on retire 8^{n-1} carrés, chacun de côté $\frac{1}{3^n}$.
- a) On note N_n le nombre total de carrés retirés à l'issue de l'étape n . Exprimer N_n en fonction de n et calculer N_5 .
- b) On note R_n l'aire restante à l'issue de l'étape n . Démontrer que $R_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$.
- c) À partir de quelle étape l'aire restante devient-elle inférieure à 1 % de l'aire initiale ? Conjecturer la limite de (R_n) .
- d) On note L_n la somme des périmètres de tous les trous à l'issue de l'étape n . Démontrer que $L_n = \frac{4}{5} \left(\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1 \right)$, puis conjecturer la limite de (L_n) . Commenter.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(2 pts)**

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$.

- a) Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .
- a) En calculant $2S_n - S_n$, démontrer que $S_n = (n-1) \times 2^n + 1$.
- b) Déterminer le plus petit entier n tel que $S_n > 10^6$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).