

Corrigé et barème – Suites numériques, arithmétiques et géométriques — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) $qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. Dans la différence, tous les termes de q à q^n s'éliminent : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on divise par $1 - q$: $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. (1 pt) (1)
- b) Pour tout k , $u_k = u_0 + kr$. Donc $u_0 + \dots + u_n = (n + 1)u_0 + r(0 + 1 + \dots + n) = (n + 1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr)$. Or $2u_0 + nr = u_0 + (u_0 + nr) = u_0 + u_n$, d'où $u_0 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$. (1 pt pour la décomposition, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- c) $v_n = q v_{n-1}$ et $v_{n+1} = q^2 v_{n-1}$, donc $v_{n-1} \times v_{n+1} = q^2 v_{n-1}^2 = (q v_{n-1})^2 = v_n^2$. (0,5 pt) (1)
- d) D'après c), il faut $(x + 2)^2 = (x - 1)(x + 8)$, soit $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 7x - 8$, d'où $3x = 12$ et $x = 4$. Réciproquement, pour $x = 4$ on obtient 3, 6 et 12 : $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$, ce sont bien trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2. (0,5 pt pour la condition, 0,5 pt pour la vérification) (1)

Méthode — La somme d'une suite arithmétique vaut « nombre de termes $\times$ moyenne du premier et du dernier » : de u_0 à u_n , il y a $n + 1$ termes, et ce décompte est la première chose à vérifier.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. Contre-exemple : $u_n = 2^n$ (raison 2) et $v_n = 1$ (raison 1). La suite $w_n = 2^n + 1$ commence par 2, 3, 5, et $\frac{3}{2} \neq \frac{5}{3}$: elle n'est pas géométrique. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour le contre-exemple) (1)
- b) Vrai. Si $u_{n+1} = q u_n$ et $v_{n+1} = q' v_n$, alors $u_{n+1}v_{n+1} = (qq') u_n v_n$: la suite produit est géométrique de raison qq' . (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Vrai. Soit (u_n) arithmétique de raison r et géométrique. D'après la propriété de l'exercice précédent, $u_1^2 = u_0 u_2$, soit $(u_0 + r)^2 = u_0(u_0 + 2r)$, c'est-à-dire $u_0^2 + 2ru_0 + r^2 = u_0^2 + 2ru_0$, d'où $r^2 = 0$ et $r = 0$. La suite est donc constante. (0,5 pt pour l'égalité utilisée, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- d) Vrai. $u_0 = 0 < 2$. Pour $n \geq 1$, en additionnant les écarts successifs, $u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. Comme $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$, on a $u_n < 2$. (0,5 pt pour l'expression de u_n , 0,5 pt pour la conclusion) (1)

Astuce — Une suite constante non nulle est géométrique de raison 1 et arithmétique de raison 0 : c'est souvent elle qui fournit le contre-exemple le plus simple.

Exercice 3 – Problème — Un lac trop pêché

(5 pts)

- a) Augmenter de 10 % revient à multiplier par 1,1, puis on retranche 300 : $p_{n+1} = 1,1 p_n - 300$. $p_1 = 2\,200 - 300 = 1\,900$; $p_2 = 2\,090 - 300 = 1\,790$. (0,5 pt) (1)
- b) On cherche ℓ tel que $\ell = 1,1 \ell - 300$, soit $\ell = 3\,000$. Avec $q_n = p_n - 3\,000$: $q_{n+1} = 1,1 p_n - 3\,300 = 1,1 (p_n - 3\,000) = 1,1 q_n$. La suite (q_n) est géométrique de raison 1,1 et de premier terme $q_0 = -1\,000$, donc $p_n = 3\,000 - 1\,000 \times 1,1^n$. (1 pt pour la suite géométrique, 0,5 pt pour p_n) (1)
- c) $p_{n+1} - p_n = -1\,000 \times 1,1^n \times (1,1 - 1) = -100 \times 1,1^n < 0$: la suite (p_n) est strictement décroissante. (1 pt) (1)
- d) $p_n \leq 0 \iff 1,1^n \geq 3$. Or $1,1^{11} \approx 2,853$ et $1,1^{12} \approx 3,138$: $p_{11} \approx 147$ et $p_{12} < 0$. Au 1er janvier 2038, il ne reste qu'environ 147 poissons, soit environ 162 après la croissance annuelle : le prélèvement de 300 poissons est impossible au cours de l'année 2038. (0,5 pt pour les valeurs, 0,5 pt pour l'interprétation) (1)
- e) $p_{n+1} = 1,1 p_n - c$; le même raisonnement avec $\ell = 10c$ donne $p_n = 10c + (2\,000 - 10c) \times 1,1^n$, d'où $p_{n+1} - p_n = 0,1 (2\,000 - 10c) \times 1,1^n = (200 - c) \times 1,1^n$. Si $c < 200$, la population augmente ; si $c = 200$, elle reste égale à 2 000 ; si $c > 200$, elle diminue et, comme $1,1^n$ devient aussi grand que l'on veut, p_n finit par devenir négatif : le lac se vide. Le prélèvement maximal est donc de 200 poissons par an. (0,5 pt pour $p_{n+1} - p_n$, 0,5 pt pour la discussion) (1)

Erreur fréquente — Écrire $p_n = 2\,000 \times 1,1^n - 300n$: chaque poisson pêché aurait aussi contribué à la croissance des années suivantes, c'est pourquoi on passe par la suite auxiliaire $p_n - \ell$.

Exercice 4 – Problème — Un tapis troué

(5 pts)

- a) À l'issue de l'étape k , chaque carré plein a été remplacé par 8 carrés pleins de côté trois fois plus petit : il y a 8^k carrés pleins de côté $\frac{1}{3^k}$. À l'étape n , on retire le centre de chacun des 8^{n-1} carrés pleins de l'étape $n - 1$, soit 8^{n-1} carrés de côté $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^n}$. (0,5 pt) (1)
- b) $N_n = 1 + 8 + 8^2 + \dots + 8^{n-1} = \frac{8^n - 1}{8 - 1} = \frac{8^n - 1}{7}$. $N_5 = \frac{32\,768 - 1}{7} = 4\,681$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) L'aire retirée à l'étape k vaut $8^{k-1} \times \frac{1}{9^k} = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}$. L'aire totale retirée vaut donc $\frac{1}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}{1 - \frac{8}{9}} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$, d'où $R_n = 1 - \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$. (Autre méthode : chaque étape conserve $\frac{8}{9}$ de l'aire, donc $R_{n+1} = \frac{8}{9} R_n$ avec $R_0 = 1$.) (1 pt) (1)
- d) (R_n) est décroissante (raison comprise entre 0 et 1). À la calculatrice, $R_{39} \approx 0,0101 \geq 0,01$ et $R_{40} \approx 0,0090 < 0,01$: c'est à partir de l'étape 40. Comme $0 < \frac{8}{9} < 1$, on conjecture que R_n tend vers 0. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- e) Un trou créé à l'étape k a pour périmètre $\frac{4}{3^k}$; il y en a 8^{k-1} , d'où une contribution $8^{k-1} \times \frac{4}{3^k} = \frac{4}{3} \left(\frac{8}{3}\right)^{k-1}$. Donc $L_n = \frac{4}{3} \times \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1}{\frac{8}{3} - 1} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} \left(\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1\right) = \frac{4}{5} \left(\left(\frac{8}{3}\right)^n - 1\right)$ (contrôle : $L_1 = \frac{4}{3}$). Comme $\frac{8}{3} > 1$, $\left(\frac{8}{3}\right)^n$ devient aussi grand que l'on veut : on conjecture que L_n tend vers $+\infty$. L'aire restante tend vers 0 alors que la longueur des bords des trous devient infinie. (1 pt pour le calcul, 0,5 pt pour la limite et le commentaire) (1)

Piège — À l'étape n , on retire 8^{n-1} carrés et non 8^n : on perce un trou dans chaque carré plein de l'étape précédente, et un décalage d'indice fausse ensuite toutes les sommes.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(2 pts)*

- a) $S_1 = 1$; $S_2 = 1 + 4 = 5$; $S_3 = 5 + 12 = 17$; $S_4 = 17 + 32 = 49$. (0,5 pt) (0,666667)
- b) $2S_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + (n-1) \times 2^{n-1} + n \times 2^n$. On soustrait S_n en regroupant les termes de même puissance de 2 : pour chaque k de 1 à $n-1$, le terme en 2^k vaut $k \times 2^k - (k+1) \times 2^k = -2^k$. Il reste $2S_n - S_n = n \times 2^n - 1 - 2 - 2^2 - \dots - 2^{n-1} = n \times 2^n - (2^n - 1)$, car $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1}$. Donc $S_n = (n-1) \times 2^n + 1$ (contrôle : $S_4 = 3 \times 16 + 1 = 49$). (0,5 pt pour le regroupement, 0,5 pt pour la conclusion) (0,666667)
- c) (S_n) est croissante (on ajoute des termes positifs). $S_{16} = 15 \times 65\,536 + 1 = 983\,041 \leq 10^6$ et $S_{17} = 16 \times 131\,072 + 1 = 2\,097\,153 > 10^6$: le plus petit entier cherché est $n = 17$. (0,5 pt) (0,666667)

Méthode — Face à une somme « terme arithmétique $\times$ terme géométrique », on multiplie par la raison, on soustrait en alignant les puissances égales, et il ne reste qu'une somme géométrique connue.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).