

Devoir surveillé – Suites numériques, arithmétiques et géométriques — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) La suite (u_n) est arithmétique, avec $u_3 = 11$ et $u_{10} = -10$. Déterminer sa raison, puis exprimer u_n en fonction de n .
- b) La suite (v_n) est géométrique de raison positive, avec $v_2 = 12$ et $v_4 = 108$. Déterminer sa raison et son premier terme v_0 .
- c) Une quantité diminue de 15 % par an pendant 3 ans. Quel est le pourcentage de baisse global, à 0,1 % près ?
- d) Calculer $S = 5 + 5 \times 1,2 + 5 \times 1,2^2 + \dots + 5 \times 1,2^9$, arrondie au centième.

Exercice 2 – Une suite récurrente apprivoisée

(5 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6 u_n + 4$. On pose $v_n = u_n - 10$.

- a) Calculer u_1 et u_2 .
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
 - b) En déduire v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
 - d) Conjecturer la limite de la suite (u_n) . Justifier brièvement.
 - e) Calculer $u_0 + u_1 + \dots + u_9$, arrondie au centième.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier.

- a) « La suite définie par $u_n = 2n^2 + 3$ est arithmétique, car $u_{n+1} - u_n$ est toujours positif. »
 - a) « La suite géométrique de premier terme 1 et de raison -2 n'est ni croissante ni décroissante. »
 - b) « Si (u_n) est arithmétique de raison 3, alors la suite définie par $v_n = 2^{u_n}$ est géométrique. »
 - c) « Les nombres 4, 6 et 9 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. »

Exercice 4 – Problème — La balle qui rebondit*(5 pts)*

On lâche une balle d'une hauteur de 3 m. Après chaque impact au sol, elle remonte à 80 % de la hauteur d'où elle est tombée. On note $h_0 = 3$ et h_n la hauteur, en m, atteinte après le n -ième rebond.

a) Calculer h_1 et h_2 .

a) Préciser la nature de la suite (h_n) , exprimer h_n en fonction de n et donner son sens de variation.

b) Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $h_n < 0,1$. Quelle valeur renvoie-t-elle ? Justifier par deux valeurs de h_n .

c) On note d_n la distance verticale totale parcourue par la balle au moment de son $(n + 1)$ -ième impact au sol. Justifier que $d_n = 3 + 2(h_1 + h_2 + \dots + h_n)$, puis montrer que $d_n = 27 - 24 \times 0,8^n$.

d) Conjecturer la limite de (d_n) . La balle peut-elle parcourir 30 m selon ce modèle ?

Exercice 5 – Problème — Deux usines*(3 pts)*

Une usine A produit 5 000 pièces en janvier 2027, puis 250 pièces de plus chaque mois. Une usine B produit 3 000 pièces en janvier 2027, puis sa production augmente de 6 % chaque mois. On note a_n et b_n les productions du n -ième mois ($n \geq 1$; $n = 1$ correspond à janvier 2027).

a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

a) Calculer la production totale de l'usine A en 2027.

b) Calculer la production totale de l'usine B en 2027, arrondie à l'unité.

c) À partir de quel mois la production mensuelle de B dépasse-t-elle celle de A ? Justifier par des valeurs.

Bon courage !