

Corrigé et barème – Suites numériques, arithmétiques et géométriques — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) $u_{10} = u_3 + 7r$, donc $7r = -10 - 11 = -21$ et $r = -3$. Puis $u_0 = u_3 - 3r = 11 + 9 = 20$, d'où $u_n = 20 - 3n$ (contrôle : $u_{10} = 20 - 30 = -10$). (0,5 pt + 0,5 pt) (0,75)
- b) $v_4 = v_2 \times q^2$, donc $q^2 = \frac{108}{12} = 9$; comme $q > 0$, $q = 3$. Puis $v_2 = v_0 \times q^2$ donne $v_0 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (0,75)
- c) Le coefficient multiplicateur global est $0,85^3 = 0,614\,125$. La baisse globale est donc de $1 - 0,614\,125 = 0,385\,875$, soit environ 38,6 % (et non 45 %). (0,5 pt) (0,75)
- d) S est la somme de 10 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 5 et de raison 1,2 : $S = 5 \times \frac{1,2^{10} - 1}{1,2 - 1} = 25 \times (1,2^{10} - 1) \approx 25 \times 5,191\,736 \approx 129,79$. (0,5 pt) (0,75)

Astuce — Entre deux termes d'une suite arithmétique, l'écart est un multiple de la raison : $u_p - u_k = (p - k)r$; entre deux termes d'une suite géométrique, c'est le quotient qui est une puissance de la raison : $v_p = v_k q^{p-k}$.

Exercice 2 – Une suite récurrente apprivoisée

(5 pts)

- a) $u_1 = 0,6 \times 1 + 4 = 4,6$; $u_2 = 0,6 \times 4,6 + 4 = 2,76 + 4 = 6,76$. (0,5 pt) (0,833333)
- b) $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = 0,6u_n + 4 - 10 = 0,6u_n - 6 = 0,6(u_n - 10) = 0,6v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 = -9$. (1 pt pour le calcul, 0,5 pt pour la raison et le premier terme) (0,833333)
- c) $v_n = -9 \times 0,6^n$, et $u_n = v_n + 10 = 10 - 9 \times 0,6^n$. (0,5 pt) (0,833333)
- d) $u_{n+1} - u_n = -9 \times 0,6^{n+1} + 9 \times 0,6^n = 9 \times 0,6^n \times (1 - 0,6) = 3,6 \times 0,6^n$. Ce nombre est strictement positif, donc (u_n) est strictement croissante. (1 pt) (0,833333)
- e) Comme $0 < 0,6 < 1$, $0,6^n$ se rapproche de 0 quand n devient grand ; donc $9 \times 0,6^n$ aussi, et u_n se rapproche de 10 (par valeurs inférieures). On conjecture que (u_n) tend vers 10. (0,5 pt) (0,833333)
- f) $u_0 + \dots + u_9 = (10 + \dots + 10) - 9(1 + 0,6 + \dots + 0,6^9) = 10 \times 10 - 9 \times \frac{1 - 0,6^{10}}{1 - 0,6} = 100 - 22,5(1 - 0,6^{10}) \approx 77,64$. (0,5 pt pour la décomposition, 0,5 pt pour le résultat) (0,833333)

Méthode — Pour une suite du type $u_{n+1} = au_n + b$, on étudie $v_n = u_n - \ell$, où ℓ est la solution de $\ell = a\ell + b$: cette suite auxiliaire est géométrique de raison a (ici $\ell = 0,6\ell + 4$ donne $\ell = 10$).

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + 3 - 2n^2 - 3 = 4n + 2$: l'écart dépend de n (il vaut 2 puis 6 : $u_0 = 3$, $u_1 = 5$, $u_2 = 11$). La suite est croissante, mais pas arithmétique. (0,5 pt pour la réponse, 0,5 pt pour la justification) (1)
- b) Vrai. Ses premiers termes sont 1, -2, 4 : u_1, u_2 donc elle n'est pas décroissante. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- c) Vrai. $u_{n+1} = u_n + 3$, donc $v_{n+1} = 2^{u_{n+1}} = 2^3 \times 2^{u_n} = 8 v_n$: (v_n) est géométrique de raison 8. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Faux. $6 - 4 = 2$ mais $9 - 6 = 3$: les écarts diffèrent. En revanche $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1,5$: ce sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 1,5. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Piège — Des écarts positifs prouvent la croissance, pas le caractère arithmétique : une suite arithmétique exige un écart constant, indépendant de n .

Exercice 4 – Problème — La balle qui rebondit

(5 pts)

- a) $h_1 = 0,8 \times 3 = 2,4$ m ; $h_2 = 0,8 \times 2,4 = 1,92$ m. (0,5 pt) (1)
- b) $h_{n+1} = 0,8 h_n$: (h_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme 3, donc $h_n = 3 \times 0,8^n$.
Premier terme positif et raison comprise entre 0 et 1 : la suite est strictement décroissante. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

- c)
- ```
def seuil():
 n = 0
 h = 3
 while h >= 0.1 :
 n = n + 1
 h = 0.8 * h
 return n
```

$h_{15} = 3 \times 0,8^{15} \approx 0,1056 \geq 0,1$  et  $h_{16} = 3 \times 0,8^{16} \approx 0,0844 < 0,1$  ; comme la suite décroît, la fonction renvoie 16. (1 pt pour la fonction, 0,5 pt pour la valeur) (1)

- d) La balle tombe d'abord de 3 m (premier impact) ; puis, pour chaque rebond  $k$  de 1 à  $n$ , elle monte de  $h_k$  et redescend de  $h_k$  avant l'impact suivant :  $d_n = 3 + 2(h_1 + \dots + h_n)$ . Or  $h_1 + \dots + h_n = 2,4 \times \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} = 12(1 - 0,8^n)$ . Donc  $d_n = 3 + 24(1 - 0,8^n) = 27 - 24 \times 0,8^n$  (contrôle :  $d_1 = 3 + 4,8 = 7,8 = 27 - 19,2$ ). (0,5 pt pour la justification, 1 pt pour le calcul) (1)
- e) Comme  $0 < 0,8 < 1$ ,  $0,8^n$  se rapproche de 0 : on conjecture que  $d_n$  tend vers 27. De plus  $d_n = 27 - 24 \times 0,8^n < 27$  pour tout  $n$  : la balle ne parcourt jamais 30 m selon ce modèle. (0,5 pt) (1)

**Erreur fréquente** — Chaque rebond compte deux fois (montée et descente), mais la chute initiale une seule fois : l'oublier fausse la distance totale de 3 m.

**Exercice 5 – Problème — Deux usines***(3 pts)*

- a)  $(a_n)$  est arithmétique de raison 250 et de premier terme  $a_1 = 5\,000$  :  $a_n = 5\,000 + 250(n - 1) = 4\,750 + 250n$ .  $(b_n)$  est géométrique de raison 1,06 et de premier terme  $b_1 = 3\,000$  :  $b_n = 3\,000 \times 1,06^{n-1}$ . (0,5 pt pour les deux expressions) (0,75)
- b)  $a_{12} = 4\,750 + 3\,000 = 7\,750$ . Somme de 12 termes :  $12 \times \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 12 \times \frac{5\,000 + 7\,750}{2} = 12 \times 6\,375 = 76\,500$  pièces. (0,5 pt) (0,75)
- c)  $b_1 + \dots + b_{12} = 3\,000 \times \frac{1,06^{12} - 1}{1,06 - 1} = 50\,000(1,06^{12} - 1) \approx 50\,610$  pièces. (0,5 pt pour la formule, 0,5 pt pour le résultat) (0,75)
- d) À la calculatrice :  $a_{22} = 10\,250$  et  $b_{22} = 3\,000 \times 1,06^{21} \approx 10\,199$ , donc  $b_{22} < a_{22}$ .  
Le tableau de valeurs montre que  $b_n < a_n$  (0,75)

**Astuce** — Une croissance à taux constant (raison  $q > 1$ ) finit toujours par dépasser une croissance à accroissement constant, même en partant de plus bas : seule la date du dépassement demande un calcul.

---

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*