

Corrigé et barème – Suites numériques, arithmétiques et géométriques — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $u_0 = 3 \times 0^2 - 2 \times 0 = 0$; $u_4 = 3 \times 16 - 2 \times 4 = 48 - 8 = 40$; $u_{10} = 3 \times 100 - 20 = 280$. (1 pt) (1)
- b) $a_1 = 3 \times 1 - 4 = -1$; $a_2 = 3 \times (-1) - 4 = -7$; $a_3 = 3 \times (-7) - 4 = -25$. Chaque terme se calcule à partir du précédent. (1 pt) (1)
- c) Pour une suite arithmétique, $v_n = v_0 + nr$, donc $v_n = 7 - 4n$. Alors $v_{15} = 7 - 4 \times 15 = 7 - 60 = -53$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) Pour une suite géométrique, $w_n = w_0 \times q^n$, donc $w_n = 5 \times 3^n$. Alors $w_4 = 5 \times 81 = 405$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- e) S est la somme des 7 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3 :
- $$S = \frac{1 - 3^7}{1 - 3} = \frac{1 - 2\,187}{-2} = \frac{-2\,186}{-2} = 1\,093. \text{ Vérification : } 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 = 1\,093$$
- . (1 pt) (1)

Méthode — Avant tout calcul, identifier le mode de définition : forme explicite (on remplace n), récurrence (on calcule de proche en proche), suite arithmétique ou géométrique (on utilise la formule du terme général).

Exercice 2 – Reconnaître une suite

(4 pts)

- a) $u_{n+1} - u_n = 5 - 2(n+1) - (5 - 2n) = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$. La différence est constante : (u_n) est arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 5$. (1 pt) (1)
- b) $v_{n+1} = \frac{3^{n+2}}{2} = \frac{3 \times 3^{n+1}}{2} = 3 \times v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = \frac{3^1}{2} = \frac{3}{2}$. (1 pt) (1)
- c) $w_0 = 1, w_1 = 2, w_2 = 5$. On a $w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$: les écarts ne sont pas égaux, donc (w_n) n'est pas arithmétique. On a $\frac{w_1}{w_0} = 2$ et $\frac{w_2}{w_1} = 2,5$: les quotients ne sont pas égaux, donc (w_n) n'est pas géométrique. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) $u_{20} = 5 - 40 = -35$. La somme compte 21 termes consécutifs d'une suite arithmétique : $u_0 + \dots + u_{20} = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{5 + (-35)}{2} = 21 \times (-15) = -315$. (0,5 pt pour le nombre de termes, 0,5 pt pour le résultat) (1)

Piège — Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique (ou géométrique), trois termes explicites suffisent ; pour prouver qu'elle l'est, il faut un calcul valable pour tout entier n .

Exercice 3 – Variations et limites

(4 pts)

- a) $u_0 = \frac{2}{1} = 2$; $u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{4}{3}$. (0,5 pt) (1)
- b) $u_{n+1} = \frac{n+3}{n+2}$, donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 4n - 4}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)(n+2) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est strictement décroissante. (1 pt pour le calcul, 0,5 pt pour la conclusion) (1)
- c) $v_{n+1} - v_n = 4 \times 0,8^n \times (0,8 - 1) = -0,8 \times 0,8^n < 0$: (v_n) est strictement décroissante (premier terme positif, raison entre 0 et 1). $w_{n+1} - w_n = -3 \times 2^n \times (2 - 1) = -3 \times 2^n < 0$: (w_n) est strictement décroissante (premier terme négatif, raison supérieure à 1). (0,5 pt + 0,5 pt) (1)
- d) $u_{99} = \frac{101}{100} = 1,01$ et $v_{30} = 4 \times 0,8^{30} \approx 0,005$. Les termes de (u_n) se rapprochent de 1 (en effet $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$) : on conjecture que (u_n) tend vers 1. Ceux de (v_n) se rapprochent de 0 : on conjecture que (v_n) tend vers 0. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Astuce — Réécrire $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ éclaire tout : le terme $\frac{1}{n+1}$ diminue et se rapproche de 0, donc u_n décroît en se rapprochant de 1 sans jamais l'atteindre.

Exercice 4 – Problème — Deux placements

(7 pts)

- a) $A_1 = 2\,000 + 150 = 2\,150$; $B_1 = 2\,000 \times 1,05 = 2\,100$; $B_2 = 2\,100 \times 1,05 = 2\,205$. (1 pt) (1,16667)
- b) Chaque année, on ajoute 150 : $A_{n+1} = A_n + 150$. La suite (A_n) est arithmétique de raison 150 et de premier terme 2 000, donc $A_n = 2\,000 + 150n$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1,16667)
- c) Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$: $B_{n+1} = 1,05 B_n$. La suite (B_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme 2 000, donc $B_n = 2\,000 \times 1,05^n$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1,16667)
- d) $A_{10} = 2\,000 + 1\,500 = 3\,500$; $B_{10} = 2\,000 \times 1,05^{10} \approx 3\,257,79$. Au bout de 10 ans, le placement A est le plus avantageux. (0,5 pt + 0,5 pt) (1,16667)
- e) On répète tant que $B_n \leq A_n$:

```
def rang() :
```

```
    n = 0
```

```
    a = 2000
```

```
    b = 2000
```

```
    while b <= a :
```

```
        n = n + 1
```

```
        a = a + 150
```

```
        b = b * 1.05
```

```
    return n
```

(0,5 pt par ligne complétée) (1,16667)

- f) À la calculatrice : $A_{16} = 4\,400$ et $B_{16} \approx 4\,365,75$, donc $B_{16} \leq A_{16}$; $A_{17} = 4\,550$ et $B_{17} \approx 4\,584,04$, donc $B_{17} > A_{17}$. La fonction renvoie 17 : c'est au bout de 17 ans, donc au 1er janvier 2043, que le placement B devient plus avantageux que le placement A. (1 pt pour les valeurs, 0,5 pt pour l'interprétation) (1,16667)

Erreur fréquente — Écrire dans le while la condition d'arrêt au lieu de la condition de poursuite : avec « while b > a », la boucle ne tourne jamais (car $2\,000 > 2\,000$ est faux) et la fonction renvoie 0.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).