

Devoir surveillé – Second degré : forme canonique, équations, signe du trinôme et inéquations — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

Soit a, b, c trois réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- a) Montrer que, pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.
- b) En déduire que, si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x .
- c) On suppose $\Delta > 0$ et on note $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Démontrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Exercice 2 – Somme, produit et paramètre

(4 pts)

- a) Montrer que $x^2 - 5x + 2 = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 , puis calculer, sans les déterminer, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ et $x_1^3 + x_2^3$.
- b) Déterminer le réel m pour lequel l'équation $x^2 - 6x + m = 0$ admet deux solutions dont l'une est le double de l'autre.
- c) Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels l'équation $(m - 1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ admet exactement deux solutions distinctes.

Exercice 3 – Inéquations

(4 pts)

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{2x - 1}{x + 1} \leq x - 1$.
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ (on pourra poser $X = x^2$).
- c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x^2 - 2x - 3)(-x^2 + 4x - 5) \geq 0$.

Exercice 4 – Problème — Une parabole et des droites

(4 pts)

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 4$ et, pour tout réel m , D_m la droite d'équation $y = mx$.

- a) Montrer que les abscisses des points communs à $\mathcal{P}$ et D_m sont les solutions de $x^2 - (m + 2)x + 4 = 0$.
- b) Discuter, selon m , le nombre de points communs à $\mathcal{P}$ et D_m .
- c) Pour chaque valeur de m donnant un seul point commun, préciser ce point, puis étudier la position de $\mathcal{P}$ par rapport à D_2 .
- d) Étudier la position relative de $\mathcal{P}$ et D_5 .

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(4 pts)*

$ABCD$ est un carré de côté 10. Pour $x \in [0; 10]$, on place $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [DA]$ tels que $AM = BN = CP = DQ = x$. On note $S(x)$ l'aire du quadrilatère $MNPQ$.

- a) Montrer que $S(x) = 2x^2 - 20x + 100$.
- b) Déterminer la position de M qui rend l'aire de $MNPQ$ minimale, et cette aire minimale.
- c) Pour quelles valeurs de x l'aire de $MNPQ$ est-elle inférieure ou égale à 68 ?
- d) Généralisation : le carré a maintenant pour côté un réel $a > 0$. Montrer que l'aire de $MNPQ$ est toujours au moins égale à la moitié de celle de $ABCD$, puis déterminer les valeurs de x pour lesquelles elle vaut les trois quarts de celle de $ABCD$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).