

Corrigé et barème – Second degré : forme canonique, équations, signe du trinôme et inéquations — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

a) Cadre général du trinôme. (0 pt) (1)

$$b) \quad ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right],$$

ce qui est la formule annoncée. (1,5 pt) (1)

c) Si $\Delta < 0$, alors $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$; le crochet est la somme d'un carré (positif) et d'un nombre strictement positif, donc il est strictement positif. Le produit $a \times [\dots]$ a donc le signe de a , pour tout x (et le trinôme ne s'annule pas). (1 pt) (1)

$$d) \quad x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \quad x_1 x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad (1,5 \text{ pt}) (1)$$

Méthode — La forme canonique est la clé de tout le chapitre : racines, signe, variations et relations somme-produit s'en déduisent.

Exercice 2 – Somme, produit et paramètre

(4 pts)

a) $\Delta = 25 - 8 = 17 > 0$: deux solutions, avec $S = 5$ et $P = 2 \neq 0$. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{2}$. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 125 - 3 \times 2 \times 5 = 95$. (1,5 pt) (1,33333)

b) On cherche x_1 et $x_2 = 2x_1$. Somme : $3x_1 = 6$, donc $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; produit : $m = 2 \times 4 = 8$. Réciproque : $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ a bien pour solutions 2 et 4. (1 pt) (1,33333)

c) Si $m = 1$: l'équation devient $-2x + 4 = 0$, une seule solution $x = 2$: $m = 1$ ne convient pas. Si $m \neq 1$: $\Delta = 4m^2 - 4(m - 1)(m + 3) = 4m^2 - 4(m^2 + 2m - 3) = -8m + 12$, et $\Delta > 0 \iff m < \frac{3}{2}$. Conclusion : $m \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; \frac{3}{2}[$. (1,5 pt) (1,33333)

Piège — Quand le coefficient de x^2 dépend d'un paramètre, on traite à part la valeur qui l'annule : l'équation n'est alors plus du second degré.

Exercice 3 – Inéquations

(4 pts)

a) Pour $x \neq -1$: $\frac{2x-1}{x+1} - (x-1) = \frac{2x-1-(x^2-1)}{x+1} = \frac{-x^2+2x}{x+1} = \frac{-x(x-2)}{x+1}$. L'inéquation équivaut à $\frac{x(x-2)}{x+1} \geq 0$. Tableau (valeurs clés $-1, 0, 2$) : quotient négatif sur $] -\infty ; -1[$, positif sur $] -1 ; 0[$, négatif sur $]0 ; 2[$, positif sur $]2 ; +\infty[$. $\mathcal{S} =] -1 ; 0[\cup]2 ; +\infty[$. (1,5 pt) (1,33333)

b) Avec $X = x^2$: $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4) < 0 \iff 1 < X < 4$. (1,33333)

c) Pour $-x^2 + 4x - 5$: $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = -1 < 0$, donc ce facteur est strictement négatif pour tout x . L'inéquation équivaut à $x^2 - 2x - 3 \leq 0$; racines -1 et 3 ($\Delta = 16$), d'où $\mathcal{S} = [-1 ; 3]$. (1 pt) (1,33333)

Astuce — Un facteur de signe constant (discriminant négatif) ne crée aucune ligne utile dans le tableau : il suffit de retenir son signe et d'ajuster le sens de l'inéquation.

Exercice 4 – Problème — Une parabole et des droites

(4 pts)

- a) Les droites D_m passent toutes par l'origine. (0 pt) (0,8)
- b) $x^2 - 2x + 4 = mx \iff x^2 - (m+2)x + 4 = 0$. (0,5 pt) (0,8)
- c) $\Delta = (m+2)^2 - 16 = (m+2-4)(m+2+4) = (m-2)(m+6)$, trinôme en m de racines -6 et 2 , positif à l'extérieur. Deux points communs si $m < -6$ ou $m > 2$; un seul si $m = -6$ ou $m = 2$; aucun si $-6 < m < 2$. (0,8)
- d) Point unique d'abscisse $\frac{m+2}{2}$. Pour $m = 2$: $x = 2$, $y = 4$, point $(2; 4)$. Pour $m = -6$: $x = -2$, $y = 12$, point $(-2; 12)$. Position : $x^2 - 2x + 4 - 2x = (x-2)^2 \geq 0$, donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de D_2 et ne la touche qu'en $(2; 4)$. (1 pt) (0,8)
- e) $x^2 - 2x + 4 - 5x = x^2 - 7x + 4$: $\Delta = 49 - 16 = 33 > 0$, racines $x_1 = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}$ et $x_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{2}$. Coefficient $1 > 0$: $\mathcal{P}$ est en dessous de D_5 sur $]x_1; x_2[$, au-dessus sur $] -\infty; x_1[$ et $]x_2; +\infty[$. (1 pt) (0,8)

Erreur fréquente — La position relative se lit sur le signe de la différence $f(x) - g(x)$, pas sur la comparaison des ordonnées en quelques points isolés.

Exercice 5 – Pour aller plus loin

(4 pts)

- a) Les quatre triangles d'angle droit AMQ , BNM , CPN , DQP ont pour côtés de l'angle droit x et $10 - x$. (0 pt) (0,8)
- b) Chaque triangle rectangle a pour aire $\frac{x(10-x)}{2}$. $S(x) = 100 - 4 \times \frac{x(10-x)}{2} = 100 - 20x + 2x^2$. (1 pt) (0,8)
- c) $S(x) = 2(x^2 - 10x) + 100 = 2[(x-5)^2 - 25] + 100 = 2(x-5)^2 + 50$. Minimum 50 pour $x = 5$: M est le milieu de $[AB]$. (1 pt) (0,8)
- d) $S(x) \leq 68 \iff 2x^2 - 20x + 32 \leq 0 \iff x^2 - 10x + 16 \leq 0$. $\Delta = 100 - 64 = 36$, racines 2 et 8 ; négatif ou nul entre elles : $x \in [2; 8]$. (1 pt) (0,8)
- e) Même calcul : $S(x) = a^2 - 2x(a-x) = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2}$. Ensuite $S(x) = \frac{3a^2}{4} \iff 2x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} = 0$: $\Delta = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$, d'où $x = \frac{2a \pm a\sqrt{2}}{4} = \frac{(2 \pm \sqrt{2})a}{4}$, deux valeurs de $[0; a]$ car $0 < \frac{2 - \sqrt{2}}{4} < \frac{2 + \sqrt{2}}{4} < 1$. (1 pt) (0,8)

Astuce — Pour généraliser, on refait le calcul avec la lettre a au lieu de 10 : la forme canonique montre que le minimum vaut toujours la moitié du carré, atteint aux milieux des côtés.