

Corrigé et barème – Second degré : forme canonique, équations, signe du trinôme et inéquations — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $3x^2 - 2x - 8 = 0$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 4 + 96 = 100 = 10^2$. Solutions $\frac{2-10}{6} = -\frac{4}{3}$ et $\frac{2+10}{6} = 2$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$. (1 pt) (1)
- b) $\Delta = 25 + 24 = 49$; racines $\frac{-5-7}{-4} = 3$ et $\frac{-5+7}{-4} = -\frac{1}{2}$. Avec $a = -2 < 0$: le trinôme est négatif sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$, nul en $-\frac{1}{2}$, positif sur $]-\frac{1}{2}; 3[$, nul en 3, négatif sur $]3; +\infty[$. (1 pt) (1)
- c) $\Delta = 4 - 28 = -24 < 0$ et $a = 1 > 0$: $x^2 + 2x + 7 > 0$ pour tout réel x . L'inéquation n'a aucune solution : $\mathcal{S} = \emptyset$. (1 pt) (1)
- d) $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$. Un carré est positif, donc $(x-3)^2 + 2 \geq 2 > 0$: le trinôme ne s'annule jamais. (1 pt) (1)

Méthode — Avant d'appliquer une formule, on ramène toujours l'équation à la forme $ax^2 + bx + c = 0$: tout passe dans le même membre.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Consigne : une réponse sans justification ne rapporte pas de point. (0 pt) (0,8)
- b) Vrai. $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$ et $a = 1 > 0$: le trinôme est du signe de a , donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. (1 pt) (0,8)
- c) Faux. Contre-exemple : $x = -3$ vérifie $x^2 = 9 > 4$ mais pas $x > 2$. En fait $x^2 - 4 = (x-2)(x+2) > 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$. (1 pt) (0,8)
- d) Vrai. Si $ac < 0$, alors $-4ac > 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$: deux solutions distinctes. (1 pt) (0,8)
- e) Faux. Contre-exemple : $x = -1$ donne $\frac{1}{x} = -1 < 1$. Pour $x \neq 0$: $\frac{1}{x} < 1 \iff \frac{1-x}{x} < 0$. Tableau de signes (valeurs clés 0 et 1) : quotient négatif pour $x < 0$ et pour $x > 1$. $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$. (1 pt) (0,8)

Piège — On ne multiplie pas une inéquation par x sans connaître son signe : on passe tout dans un membre et on étudie le signe d'un quotient.

Exercice 3 – Une équation à paramètre

(4 pts)

- a) Remarque : le coefficient de x^2 vaut $1 \neq 0$, l'équation est bien du second degré pour tout m . (0 pt) (0,8)
- b) $a = 1, b = -2m, c = m + 6 : \Delta = (-2m)^2 - 4(m + 6) = 4m^2 - 4m - 24 = 4(m^2 - m - 6)$. (1 pt) (0,8)
- c) Trinôme en m : discriminant $1 + 24 = 25$, racines $\frac{1-5}{2} = -2$ et $\frac{1+5}{2} = 3$. Coefficient $1 > 0$: $m^2 - m - 6 > 0$ pour $m < -2$ ou $m > 3$, nul en -2 et 3 , négatif sur $] -2 ; 3[$. (1 pt) (0,8)
- d) Δ a le signe de $m^2 - m - 6$. Si $m < -2$ ou $m > 3$: deux solutions ; si $m = -2$ ou $m = 3$: une solution ; si $-2 < m < 3$: aucune solution. (0,8)
- e) Solution unique $x_0 = -\frac{b}{2a} = m$. Pour $m = 3 : x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, solution 3. Pour $m = -2 : x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, solution -2 . (1 pt) (0,8)

Astuce — Quand le discriminant dépend d'un paramètre, c'est lui-même un trinôme : on étudie son signe exactement comme en x .

Exercice 4 – Deux courbes et un quotient

(4 pts)

- a) On étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$. (0 pt) (0,8)
- b) $f(x) = g(x) \iff x^2 - 4x - 5 = 0 : \Delta = 16 + 20 = 36, x = \frac{4 \pm 6}{2}$, soit -1 et 5 . $g(-1) = 2$ et $g(5) = 14$: points $(-1 ; 2)$ et $(5 ; 14)$ (contrôle : $f(-1) = 1 + 2 - 1 = 2, f(5) = 25 - 10 - 1 = 14$). (1 pt) (0,8)
- c) $f(x) - g(x) = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$, de coefficient $1 > 0$: positif à l'extérieur des racines. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty ; -1[$ et $]5 ; +\infty[$, en dessous sur $] -1 ; 5[$; elles se coupent en $x = -1$ et $x = 5$. (1 pt) (0,8)
- d) Valeur interdite : $x = 2$. Tableau de signes : numérateur positif hors de $[-1 ; 5]$, négatif sur $] -1 ; 5[$; $2 - x$ positif pour $x < 2$, négatif pour $x > 2$. Quotient : positif sur $] -\infty ; -1[$, négatif sur $] -1 ; 2[$, positif sur $]2 ; 5[$, négatif sur $]5 ; +\infty[$, nul en -1 et 5 . $\mathcal{S} =] -\infty ; -1[\cup]2 ; 5[$. (1,5 pt) (0,8)
- e) En -1 et 5 le numérateur s'annule : le quotient vaut 0 et vérifie « ≥ 0 ». En 2 le dénominateur s'annule : le quotient n'existe pas. (0,5 pt) (0,8)

Erreur fréquente — Dans un tableau de signes de quotient, la valeur qui annule le dénominateur reçoit une double barre et n'est jamais solution, même avec « $\geq$ ».

Exercice 5 – Problème — Bénéfice d'un artisan

(4 pts)

- a) Rappel : bénéfice = recette - coût. (0 pt) (0,666667)
- b) $B(x) = 10x - (x^2 + 2x + 9) = -x^2 + 8x - 9$. (0,5 pt) (0,666667)
- c) $B(x) = -(x^2 - 8x) - 9 = -[(x - 4)^2 - 16] - 9 = -(x - 4)^2 + 7$. (1 pt) (0,666667)
- d) $-(x - 4)^2 \leq 0$, donc $B(x) \leq 7$, avec égalité pour $x = 4 \in [0 ; 10]$. Bénéfice maximal : 7 centaines d'euros, soit 700 euros, pour 400 objets. (0,5 pt) (0,666667)
- e) $B(x) > 0 \iff x^2 - 8x + 9 < 0$. $\Delta = 64 - 36 = 28, \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$; racines $4 - \sqrt{7} \approx 1,354$ et $4 + \sqrt{7} \approx 6,646$, toutes deux dans $[0 ; 10]$. Le trinôme est négatif strictement entre les racines : $x \in]4 - \sqrt{7} ; 4 + \sqrt{7}[$. En nombre d'objets (100x entre 135,4 et 664,6) : de 136 à 664 objets. (1,5 pt) (0,666667)
- f) 800 euros correspondent à $B(x) = 8 : -(x - 4)^2 + 7 = 8 \iff (x - 4)^2 = -1$, impossible car un carré est positif. Le bénéfice ne peut pas atteindre 800 euros. (0,5 pt) (0,666667)

Méthode — En contexte, on revient toujours à l'unité de l'énoncé : ici x compte des centaines d'objets, et la réponse finale se donne en nombre d'objets.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).