

Corrigé et barème – Second degré : forme canonique, équations, signe du trinôme et inéquations — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $a = 2, b = 1, c = -6$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0$. Deux solutions : $x_1 = \frac{-1-7}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$. $\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{3}{2}\right\}$. (1 pt) (1)
- b) $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144 = 0$: une seule solution $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. D'ailleurs $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$. $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. (1 pt) (1)
- c) $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 4 - 20 = -16 < 0$: le trinôme ne s'annule pas et garde le signe de $a = -1$. Donc $-x^2 + 2x - 5 < 0$ pour tout réel x . (1 pt) (1)
- d) $x^2 - 7x = x(x - 7)$, trinôme de racines 0 et 7, avec $a = 1 > 0$: il est négatif ou nul entre les racines. $\mathcal{S} = [0; 7]$. (1 pt) (1)
- e) $\Delta = 1 + 48 = 49$; racines $\frac{-1-7}{2} = -4$ et $\frac{-1+7}{2} = 3$. Avec $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement positif à l'extérieur des racines : $\mathcal{S} =]-\infty; -4[\cup]3; +\infty[$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour une inéquation du second degré, on cherche d'abord les racines, puis on applique la règle : signe de a à l'extérieur des racines, signe contraire entre elles.

Exercice 2 – Un trinôme sous toutes ses formes

(5 pts)

- a) Énoncé : on travaille avec $a = 2, b = -8, c = 6$. (0 pt) (1)
- b) $2(x - 2)^2 - 2 = 2(x^2 - 4x + 4) - 2 = 2x^2 - 8x + 8 - 2 = 2x^2 - 8x + 6 = f(x)$. (1 pt) (1)
- c) Forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2 > 0, \alpha = 2, \beta = -2$: f est décroissante sur $] -\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$. Elle admet un minimum égal à -2 , atteint en $x = 2$. (1,5 pt) (1)
- d) $f(x) = 0 \iff 2(x - 2)^2 = 2 \iff (x - 2)^2 = 1 \iff x - 2 = 1$ ou $x - 2 = -1 \iff x = 3$ ou $x = 1$. $\mathcal{S} = \{1; 3\}$. (1 pt) (1)
- e) Les racines sont 1 et 3, donc $f(x) = 2(x - 1)(x - 3)$. Comme $a = 2 > 0, f(x) < 0$ strictement entre les racines : $\mathcal{S} =]1; 3[$. (1,5 pt) (1)

Astuce — Quand la forme canonique est déjà connue, isoler le carré $(x - \alpha)^2$ donne les racines plus vite que le discriminant.

Exercice 3 – Racine évidente

(5 pts)

- a) Énoncé : $a = 5$, $b = -2$, $c = -3$. (0 pt) (0,833333)
- b) $g(1) = 5 \times 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 5 - 2 - 3 = 0$: 1 est bien une racine. (1 pt) (0,833333)
- c) Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = -\frac{3}{5}$. Avec $x_1 = 1$, on obtient $x_2 = -\frac{3}{5}$. Contrôle : $x_1 + x_2 = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = -\frac{b}{a}$. (1 pt) (0,833333)
- d) $g(x) = 5(x-1)\left(x + \frac{3}{5}\right) = (x-1)(5x+3)$. (1 pt) (0,833333)
- e) $a = 5 > 0$: $g(x)$ est positif ou nul à l'extérieur des racines (racines incluses). $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty[$. (1 pt) (0,833333)
- f) Ces nombres sont les solutions de $x^2 - 11x + 28 = 0$: $\Delta = 121 - 112 = 9$, d'où $x = \frac{11 \pm 3}{2}$, soit 4 et 7. Contrôle : $4 + 7 = 11$ et $4 \times 7 = 28$. (1 pt) (0,833333)

Erreur fréquente — Dans une factorisation, on n'oublie pas le coefficient a : $g(x) = 5(x-1)\left(x + \frac{3}{5}\right)$ et non $(x-1)\left(x + \frac{3}{5}\right)$.

Exercice 4 – Problème — Un enclos contre un mur

(5 pts)

- a) Situation : deux côtés de longueur x et un côté parallèle au mur de longueur $20 - 2x$. (0 pt) (0,833333)
- b) Les longueurs doivent être strictement positives : $x > 0$ et $20 - 2x > 0$, soit $x < 10$. L'aire vaut $x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$. (1 pt) (0,833333)
- c) $-2(x-5)^2 + 50 = -2(x^2 - 10x + 25) + 50 = -2x^2 + 20x - 50 + 50 = -2x^2 + 20x = A(x)$. (1 pt) (0,833333)
- d) $-2(x-5)^2 \leq 0$, donc $A(x) \leq 50$, avec égalité pour $x = 5$ (qui est bien dans $]0; 10[$). Aire maximale : 50 m^2 , pour un enclos de 5 m sur $20 - 10 = 10 \text{ m}$. (1 pt) (0,833333)
- e) $A(x) \geq 42 \iff -2x^2 + 20x - 42 \geq 0 \iff x^2 - 10x + 21 \leq 0$ (division par $-2 < 0$, on change le sens). $\Delta = 100 - 84 = 16$, racines $\frac{10 \pm 4}{2}$: 3 et 7. Le trinôme ($a = 1 > 0$) est négatif ou nul entre les racines : $x \in [3; 7]$, intervalle contenu dans $]0; 10[$. (1,5 pt) (0,833333)
- f) Non : l'aire maximale est 50 m^2 d'après c), donc 52 m^2 est impossible. (0,5 pt) (0,833333)

Piège — Diviser une inéquation par un nombre négatif, comme -2 , oblige à changer le sens de l'inégalité : $\geq$ devient $\leq$.