

Devoir surveillé – Produit scalaire, géométrie repérée et trigonométrie — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes exigeants

(3 pts)

- Simplifier, pour tout réel x : $S(x) = \sin(x - \pi) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\pi - x)$.
- Déterminer la mesure principale de $\frac{2027\pi}{6}$, puis la valeur exacte de $\sin\left(\frac{2027\pi}{6}\right)$.
- On donne $A(-1; 4)$ et $B(5; 2)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6$.

Exercice 2 – Démontrer — Identité du parallélogramme et médianes

(4 pts)

- Démontrer que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.
- Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
Application : calculer AI lorsque $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 6$.
- On donne $A(-3; 0)$ et $B(3; 0)$. Déterminer l'ensemble E des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 50$, d'abord avec b), puis en contrôlant avec les coordonnées.
- Déterminer les points d'intersection de E avec la parabole d'équation $y = x^2 - 4$.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

- « Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $\vec{v} = \vec{w}$. »
- « Pour tout réel x , $\sin(x + \pi) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x) \cos(\pi - x) = -1$. »
- « Les droites $d : 2x - 3y + 1 = 0$ et $d' : 6x + 4y - 5 = 0$ sont perpendiculaires. »
- « La droite d'équation $y = x + 2$ est tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 7 = 0$. »

Exercice 4 – Problème — Tangentes issues d'un point

(5 pts)

On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique (centre O , rayon 1) et $A(3; 0)$. Pour tout réel θ , M est le point de $\mathcal{C}$ associé à θ .

- Montrer que $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = 1 - 3 \cos \theta$.
 - En déduire les points M_1 (d'ordonnée positive) et M_2 de $\mathcal{C}$ tels que la droite (AM) soit tangente à $\mathcal{C}$ en M .
 - Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_1 et vérifier qu'elle passe par A .
 - Calculer AM_1 , puis $\cos \widehat{M_1AM_2}$.
 - Déterminer, sans autre indication, les réels $\theta \in]-\pi; \pi]$ pour lesquels $MA = \sqrt{13}$.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Cercles d’Apollonius**(4 pts)**

On donne $O(0; 0)$ et $B(3; 0)$. Pour un réel $k > 0$, on étudie l’ensemble Γ_k des points $M(x; y)$ tels que $MO = k MB$.

- a) Montrer que $M \in \Gamma_2$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$.
- a) En déduire la nature de Γ_2 et vérifier que ses deux points situés sur l’axe des abscisses conviennent.
- b) Déterminer les points T de Γ_2 tels que la droite (OT) soit tangente à Γ_2 , puis une mesure en radians de l’angle géométrique entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OT}$.
- c) Généralisation : pour $k > 0$ et $k \neq 1$, montrer que Γ_k est un cercle dont on exprimera le centre et le rayon en fonction de k .
- d) Que devient Γ_k lorsque $k = 1$?

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).