

Corrigé et barème – Produit scalaire, géométrie repérée et trigonométrie — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes exigeants

(3 pts)

- a) $\sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$. Donc $S(x) = -\sin x - \sin x + 2\sin x = 0$. (1 pt) (1)
- b) $2027 = 6 \times 337 + 5$, donc $\frac{2027\pi}{6} = 337\pi + \frac{5\pi}{6} = 168 \times 2\pi + \pi + \frac{5\pi}{6} = 168 \times 2\pi + \frac{11\pi}{6}$. Or $\frac{11\pi}{6} - 2\pi = -\frac{\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$: la mesure principale est $-\frac{\pi}{6}$ et $\sin\left(\frac{2027\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. (1 pt) (1)
- c) Soit $I(2; 3)$ le milieu de $[AB]$. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$ avec $IA^2 = 9 + 1 = 10$. La condition s'écrit $MI^2 = 4$: c'est le cercle de centre $I(2; 3)$ et de rayon 2, d'équation $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$. (1 pt) (1)

Astuce — Pour une grande fraction de π , on effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : seul le reste, à un nombre pair de π près, compte.

Exercice 2 – Démontrer — Identité du parallélogramme et médianes

(4 pts)

- a) Par bilinéarité : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. En additionnant, les doubles produits s'éliminent : on obtient $2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$. (1 pt) (1)
- b) Avec $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{IB}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et, comme $\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$. D'après a) : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2 = 2AI^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$. Application : $49 + 25 = 2AI^2 + 18$, donc $AI^2 = 28$ et $AI = 2\sqrt{7}$. (1 pt) (1)
- c) Le milieu de $[AB]$ est O et $AB = 6$: $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$. La condition équivaut à $MO^2 = 16$: E est le cercle de centre O et de rayon 4. Contrôle : $(x + 3)^2 + y^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 18 = 50 \iff x^2 + y^2 = 16$. (1 pt) (1)
- d) Sur la parabole, $x^2 = y + 4$; en remplaçant : $y + 4 + y^2 = 16$, soit $y^2 + y - 12 = 0$, $\Delta = 1 + 48 = 49$, $y = 3$ ou $y = -4$. Si $y = 3$: $x^2 = 7$, $x = \pm\sqrt{7}$. Si $y = -4$: $x^2 = 0$, $x = 0$. Points : $(\sqrt{7}; 3)$, $(-\sqrt{7}; 3)$ et $(0; -4)$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour croiser un cercle et une parabole $y = x^2 + k$, on remplace x^2 par $y - k$: on obtient une équation du second degré en y , et chaque y retenu doit rendre x^2 positif ou nul.

Exercice 3 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Faux. Contre-exemple : $\vec{u}(1; 0)$, $\vec{v}(0; 1)$, $\vec{w}(0; 2)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{u} \cdot \vec{w}$ mais $\vec{v} \neq \vec{w}$. On peut seulement conclure que $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$, c'est-à-dire $\vec{u} \perp \vec{v} - \vec{w}$. (1 pt) (1)
- b) Vrai. $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
L'expression vaut $-\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$. (1 pt) (1)
- c) Vrai. Des vecteurs normaux sont $\vec{n}(2; -3)$ et $\vec{n}'(6; 4)$; $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 12 - 12 = 0$. Les vecteurs normaux étant orthogonaux, les droites sont perpendiculaires. (1 pt) (1)
- d) Faux. En remplaçant y par $x + 2$: $x^2 + x^2 + 4x + 4 - 2x - 7 = 0$, soit $2x^2 + 2x - 3 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 + 24 = 28 > 0$: deux points d'intersection, la droite est sécante et non tangente. (1 pt) (1)

Piège — On ne « simplifie » jamais par un vecteur dans un produit scalaire : l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ traduit seulement une orthogonalité.

Exercice 4 – Problème — Tangentes issues d'un point

(5 pts)

- a) $M(\cos \theta; \sin \theta)$, $\overrightarrow{MO}(-\cos \theta; -\sin \theta)$ et $\overrightarrow{MA}(3 - \cos \theta; -\sin \theta)$. Donc $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = -3 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 - 3 \cos \theta$. (1 pt) (1)
- b) (AM) est tangente en M si et seulement si $(AM) \perp (OM)$, soit $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, soit $\cos \theta = \frac{1}{3}$.
Alors $\sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, $\sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$. D'où $M_1\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ et $M_2\left(\frac{1}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. (1 pt) (1)
- c) Vecteur normal $\overrightarrow{OM_1}\left(\frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, ou $3\overrightarrow{OM_1}(1; 2\sqrt{2})$: $x + 2\sqrt{2}y + c = 0$. Avec M_1 : $\frac{1}{3} + \frac{8}{3} + c = 0$, $c = -3$. Tangente : $x + 2\sqrt{2}y - 3 = 0$; pour $A(3; 0)$: $3 + 0 - 3 = 0$, elle passe bien par A . (1 pt) (1)
- d) $\overrightarrow{AM_1}\left(-\frac{8}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ et $\overrightarrow{AM_2}\left(-\frac{8}{3}; -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. $AM_1^2 = \frac{64}{9} + \frac{8}{9} = 8$, donc $AM_1 = AM_2 = 2\sqrt{2}$
(contrôle par Pythagore : $\sqrt{9-1}$). $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2} = \frac{64}{9} - \frac{8}{9} = \frac{56}{9}$, d'où $\cos \widehat{M_1AM_2} = \frac{56/9}{8} = \frac{7}{9}$. (1 pt) (1)
- e) $MA^2 = (3 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 9 - 6 \cos \theta + 1 = 10 - 6 \cos \theta$ (c'est aussi Al-Kashi dans OMA).
 $MA = \sqrt{13} \iff 10 - 6 \cos \theta = 13 \iff \cos \theta = -\frac{1}{2}$. Dans $] -\pi; \pi]$: $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{2\pi}{3}$. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Traduire « tangente en M » par « perpendiculaire au rayon $[OM]$ » est la clé : oublier cette traduction mène à chercher une pente qu'on ne sait pas calculer.

Exercice 5 – Pour aller plus loin — Cercles d'Apollonius

(4 pts)

- a) Les distances étant positives, $MO = 2MB \iff MO^2 = 4MB^2 \iff x^2 + y^2 = 4((x-3)^2 + y^2) \iff x^2 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 \iff 3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0 \iff x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$. (1 pt) (0,8)
- b) $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$, donc l'équation équivaut à $(x-4)^2 + y^2 = 4$: Γ_2 est le cercle de centre $\Omega(4; 0)$ et de rayon 2. Ses points sur l'axe sont $(2; 0)$: $MO = 2$, $MB = 1$; et $(6; 0)$: $MO = 6$, $MB = 3$. Dans les deux cas $MO = 2MB$. (0,5 pt) (0,8)
- c) (OT) tangente en T équivaut à $\overrightarrow{TO} \cdot \overrightarrow{T\Omega} = 0$, soit $(-x)(4-x) + (-y)(-y) = 0$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Avec $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$, par soustraction : $4x - 12 = 0$, $x = 3$, puis $y^2 = 12 - 9 = 3$. D'où $T(3; \sqrt{3})$ et $T'(3; -\sqrt{3})$. $OT = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et $\vec{i} \cdot \overrightarrow{OT} = 3$, donc le cosinus de l'angle vaut $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: l'angle mesure $\frac{\pi}{6}$ (de même pour T'). (1 pt) (0,8)
- d) $MO^2 = k^2 MB^2 \iff (1-k^2)(x^2 + y^2) + 6k^2x - 9k^2 = 0$. Comme $k \neq 1$, on divise par $1-k^2$: $x^2 + y^2 - \frac{6k^2}{k^2-1}x + \frac{9k^2}{k^2-1} = 0$. En posant $a = \frac{3k^2}{k^2-1}$: $(x-a)^2 + y^2 = a^2 - \frac{9k^2}{k^2-1} = \frac{9k^4 - 9k^2(k^2-1)}{(k^2-1)^2} = \frac{9k^2}{(k^2-1)^2} > 0$. Γ_k est le cercle de centre $\left(\frac{3k^2}{k^2-1}; 0\right)$ et de rayon $\frac{3k}{|k^2-1|}$ (pour $k = 2$: centre $(4; 0)$, rayon 2, cohérent). (1 pt) (0,8)
- e) Pour $k = 1$: $MO = MB$, l'équation devient $6x - 9 = 0$, soit $x = \frac{3}{2}$: Γ_1 est la médiatrice de $[OB]$, une droite et non un cercle. (0,5 pt) (0,8)

Astuce — Avant toute généralisation, on garde un cas particulier déjà traité ($k = 2$) sous la main : il sert de contrôle immédiat des formules obtenues.