

Devoir surveillé – Produit scalaire, géométrie repérée et trigonométrie — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Déterminer la mesure principale de $-\frac{29\pi}{6}$.
- b) Simplifier, pour tout réel x : $A(x) = \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- c) On donne $A(2; -1)$ et $B(-1; 3)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- d) Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Exercice 2 – Distance d'un point à une droite

(4 pts)

On considère la droite $d : 3x + 4y - 2 = 0$ et le point $\Omega(4; 5)$.

- a) Vérifier que $A(2; -1)$ appartient à d et donner un vecteur normal $\vec{n}$ de d .
 - a) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à d passant par Ω .
 - b) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de Ω sur d .
 - c) Calculer $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \vec{n}$. Justifier que $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{H\Omega} \cdot \vec{n}$, puis en déduire la distance ΩH .
 - d) Écrire une équation du cercle Γ de centre Ω tangent à d .
 - e) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

Exercice 3 – Des vecteurs qui tournent

(4 pts)

Pour tout réel x , on pose $\vec{u}(\cos x; \sin x)$ et $\vec{v}(-\sin x; \cos x)$, et l'on donne $\vec{w}(\sqrt{3}; 1)$.

- a) Montrer que $\vec{v}$ a pour coordonnées $\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, puis que $\|\vec{u}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
 - a) Calculer $\|\vec{w}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{w}$ pour $x = \frac{\pi}{6}$. Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?
 - b) Pour $x = \frac{5\pi}{6}$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et en déduire une mesure en radians de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
 - c) On note $M(\cos x; \sin x)$. Montrer que $\vec{u} \perp \vec{w}$ si et seulement si M appartient à la droite $\sqrt{3}X + Y = 0$ et au cercle trigonométrique. En déduire les réels $x \in]-\pi; \pi]$ tels que $\vec{u} \perp \vec{w}$.

Exercice 4 – Problème — Deux bateaux*(4 pts)*

Deux bateaux quittent un port P . À midi, le bateau A est à 6 km de P , le bateau B à 10 km, et l'angle $\widehat{APB}$ mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad.

a) Convertir $\frac{2\pi}{3}$ rad en degrés.

a) Calculer $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$.

b) Calculer la distance AB entre les deux bateaux.

c) Calculer $\cos \widehat{PAB}$, puis une mesure de $\widehat{PAB}$ en degrés au dixième près.

d) Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (PA) . Justifier que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH}$, en déduire PH , puis BH et l'aire du triangle PAB .

Exercice 5 – Problème — Un cercle et une parabole*(4 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4y = 0$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon.

a) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$. On notera A celui d'abscisse positive et B celui d'abscisse négative, le troisième étant O .

b) À l'aide d'un produit scalaire, calculer une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$. En déduire la nature du triangle OAB .

c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T_A à $\mathcal{C}$ en A .

d) Montrer que T_A et la tangente T_B à $\mathcal{C}$ en B se coupent en un point T de l'axe des ordonnées, et calculer TA .

Bon courage !