

Corrigé et barème – Produit scalaire, géométrie repérée et trigonométrie — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $-\frac{29\pi}{6} + 4\pi = -\frac{29\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$, qui appartient à $] -\pi ; \pi]$: la mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$. (1 pt)
- b) $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, donc $A(x) = -\cos x - \cos x + \cos x = -\cos x$. (1 pt)
- c) $\overrightarrow{AB}(-3; 4)$: la droite a une équation $-3x + 4y + c = 0$. Avec A : $-6 - 4 + c = 0$, donc $c = 10$. Équation : $-3x + 4y + 10 = 0$. (1 pt)
- d) $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ et $y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$, donc l'équation équivaut à $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$: c'est le cercle de centre $(3; -2)$ et de rayon 4. (1 pt)

Méthode — Pour reconnaître un cercle, on complète les carrés en x et en y ; le membre de droite doit être strictement positif pour obtenir un vrai cercle.

Exercice 2 – Distance d'un point à une droite

(4 pts)

- a) $3 \times 2 + 4 \times (-1) - 2 = 6 - 4 - 2 = 0$, donc $A \in d$; un vecteur normal est $\vec{n}(3; 4)$. (0,5 pt) (0,666667)
- b) $\Delta \perp d$, donc $\vec{n}(3; 4)$ dirige Δ et $(4; -3)$ lui est normal : $4x - 3y + c = 0$. Avec Ω : $16 - 15 + c = 0$, $c = -1$. Δ : $4x - 3y - 1 = 0$. (0,5 pt) (0,666667)
- c) H est l'intersection de d et Δ : $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$. En multipliant par 3 et par 4 puis en additionnant : $9x + 16x = 6 + 4$, donc $x = \frac{2}{5}$ et $y = \frac{4x - 1}{3} = \frac{1}{5}$. $H\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$. (1 pt) (0,666667)
- d) $\overrightarrow{A\Omega}(2; 6)$, donc $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \vec{n} = 6 + 24 = 30$. Par Chasles, $\overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{H\Omega}$ et $\overrightarrow{AH}$ dirige d , donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$: $\overrightarrow{A\Omega} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{H\Omega} \cdot \vec{n}$. Or $\overrightarrow{H\Omega}\left(\frac{18}{5}; \frac{24}{5}\right) = \frac{6}{5}\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et de même sens, donc $\overrightarrow{H\Omega} \cdot \vec{n} = \Omega H \times \|\vec{n}\| = 5 \Omega H$. D'où $5 \Omega H = 30$ et $\Omega H = 6$ (contrôle : $\sqrt{3,6^2 + 4,8^2} = \sqrt{36} = 6$). (1 pt) (0,666667)
- e) Le rayon est la distance de Ω à d , soit 6 : $\Gamma : (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$. (0,5 pt) (0,666667)
- f) Avec $y = 0$: $(x - 4)^2 + 25 = 36$, soit $(x - 4)^2 = 11$, donc $x = 4 - \sqrt{11}$ ou $x = 4 + \sqrt{11}$. Points : $(4 - \sqrt{11}; 0)$ et $(4 + \sqrt{11}; 0)$. (0,5 pt) (0,666667)

Astuce — Le produit scalaire avec un vecteur normal « oublie » la composante le long de la droite : c'est ce qui permet de lire une distance avec n'importe quel point de d .

Exercice 3 – Des vecteurs qui tournent

(4 pts)

- a) Angles associés : $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, ce sont bien les coordonnées de $\vec{v}$.
 $\|\vec{u}\|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\|\vec{u}\| = 1$, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\cos x \sin x + \sin x \cos x = 0$. (1 pt) (1)
- b) $\|\vec{w}\| = \sqrt{3+1} = 2$. Pour $x = \frac{\pi}{6}$: $\vec{u} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Donc $\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{2}{1 \times 2} = 1$:
l'angle est nul, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens (en effet $\vec{w} = 2\vec{u}$). (1 pt) (1)
- c) Pour $x = \frac{5\pi}{6}$: $\vec{u} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \right)$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$. Le cosinus de l'angle vaut $\frac{-1}{1 \times 2} = -\frac{1}{2}$,
donc l'angle mesure $\frac{2\pi}{3}$ rad. (1 pt) (1)
- d) $\vec{u} \cdot \vec{w} = \sqrt{3} \cos x + \sin x$: il est nul si et seulement si $M(X; Y) = (\cos x; \sin x)$ vérifie $\sqrt{3}X + Y = 0$, et M est toujours sur le cercle $X^2 + Y^2 = 1$. Avec $Y = -\sqrt{3}X$: $X^2 + 3X^2 = 1$, donc $X = \pm \frac{1}{2}$.
On obtient $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, associé à $x = -\frac{\pi}{3}$, et $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, associé à $x = \frac{2\pi}{3}$. $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$. (1 pt) (1)

Méthode — Une condition sur $\cos x$ et $\sin x$ devient une question de géométrie : on cherche les points du cercle trigonométrique situés sur une droite, puis on lit les réels associés.

Exercice 4 – Problème — Deux bateaux

(4 pts)

- a) $\frac{2\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 120^\circ$. (0,5 pt) (0,8)
- b) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \times PB \times \cos \frac{2\pi}{3} = 6 \times 10 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -30$. (0,5 pt) (0,8)
- c) Al-Kashi : $AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2 \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 36 + 100 + 60 = 196$, donc $AB = 14$ km. (1 pt) (0,8)
- d) Al-Kashi en A : $PB^2 = PA^2 + AB^2 - 2 \times PA \times AB \times \cos \widehat{PAB}$, soit $100 = 36 + 196 - 168 \cos \widehat{PAB}$. Donc $\cos \widehat{PAB} = \frac{132}{168} = \frac{11}{14}$ et $\widehat{PAB} \approx 38,2^\circ$. (1 pt) (0,8)
- e) $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HB}$ avec $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{PA}$, d'où l'égalité. L'angle $\widehat{APB}$ étant obtus, H est sur la demi-droite opposée à $[PA]$: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PH} = -PA \times PH = -6 PH = -30$, donc $PH = 5$ km. Pythagore dans PHB rectangle en H : $BH = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ km. Aire : $\frac{1}{2} \times PA \times BH = \frac{1}{2} \times 6 \times 5\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \approx 26,0$ km². (1 pt) (0,8)

Piège — Quand l'angle est obtus, le projeté tombe hors du segment et le produit scalaire est négatif : on écrit $-PA \times PH$, pas $PA \times PH$.

Exercice 5 – Problème — Un cercle et une parabole**(4 pts)**

- a) $y^2 - 4y = (y - 2)^2 - 4$, donc l'équation équivaut à $x^2 + (y - 2)^2 = 4$: cercle de centre $\Omega(0; 2)$ et de rayon 2. (0,5 pt) (0,8)
- b) En remplaçant x^2 par y : $y + y^2 - 4y = 0$, soit $y(y - 3) = 0$. Si $y = 0$, $x^2 = 0$ et $x = 0$: point O . Si $y = 3$, $x^2 = 3$: $x = \pm\sqrt{3}$. D'où $A(\sqrt{3}; 3)$, $B(-\sqrt{3}; 3)$ et $O(0; 0)$. (1 pt) (0,8)
- c) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 + 9 = 6$ et $OA = OB = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$. Donc $\cos \widehat{AOB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle OAB est isocèle en O avec un angle au sommet de $\frac{\pi}{3}$, ses angles à la base valent aussi $\frac{\pi}{3}$: il est équilatéral. (1 pt) (0,8)
- d) T_A passe par A et a pour vecteur normal $\overrightarrow{\Omega A}(\sqrt{3}; 1)$: $\sqrt{3}x + y + c = 0$. Avec A : $3 + 3 + c = 0$, $c = -6$. T_A : $\sqrt{3}x + y - 6 = 0$. (1 pt) (0,8)
- e) De même, $\overrightarrow{\Omega B}(-\sqrt{3}; 1)$ et T_B : $-\sqrt{3}x + y + c' = 0$ avec $3 + 3 + c' = 0$, soit T_B : $-\sqrt{3}x + y - 6 = 0$. Pour $x = 0$, les deux équations donnent $y = 6$: $T(0; 6)$ est commun aux deux tangentes. $TA = \sqrt{3 + (6 - 3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. (0,5 pt) (0,8)

Erreur fréquente — Pour la tangente à un cercle, le vecteur normal est le rayon $\overrightarrow{\Omega A}$ et non $\overrightarrow{OA}$: l'origine du repère n'est pas le centre du cercle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).