

Corrigé et barème – Produit scalaire, géométrie repérée et trigonométrie — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad. (1 pt) (1)
- b) $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, donc $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (1 pt) (1)
- c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 2 + (-1) \times 8 = 8 - 8 = 0$: les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. (1 pt) (1)
- d) Pour $ax + by + c = 0$, $\vec{n}(a; b)$ est normal et $\vec{u}(-b; a)$ est directeur : $\vec{n}(3; -5)$ et $\vec{u}(5; 3)$ (contrôle : $3 \times 5 + (-5) \times 3 = 0$). (1 pt) (1)
- e) $M(x; y)$ est sur le cercle si et seulement si $\Omega M^2 = 9$, soit $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$. (1 pt) (1)

Méthode — Pour les angles comme $\frac{2\pi}{3}$, on se ramène à un angle remarquable du premier quadrant grâce aux angles associés, puis on règle le signe avec le cercle trigonométrique.

Exercice 2 – Normes, angles et produit scalaire

(5 pts)

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -10$. (1 pt) (1,25)
- b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 16 - 20 + 25 = 21$, donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{21}$. (1,5 pt) (1,25)
- c) Par bilinéarité : $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{u} - \|\vec{v}\|^2 = 32 - 10 + 20 - 25 = 17$. (1,5 pt) (1,25)
- d) $(\vec{u} + k\vec{v}) \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 + k\vec{u} \cdot \vec{v} = 16 - 10k$. Ce produit est nul si et seulement si $k = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$. (1 pt) (1,25)

Erreur fréquente — $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ n'est pas égal à $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 9$: on passe toujours par le carré scalaire, qui fait apparaître le double produit $2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 3 – Un triangle dans le repère

(5 pts)

- a) $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 4)$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 16$. (1 pt) (1,25)
- b) $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$. Comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$: $\cos \widehat{BAC} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, d'où $\widehat{BAC} \approx 36,9^\circ$. (1,5 pt) (1,25)
- c) La hauteur issue de C est la droite passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(4; 2)$: $4x + 2y + c = 0$. Avec $C(3; 6)$: $12 + 12 + c = 0$, donc $c = -24$. Équation : $4x + 2y - 24 = 0$, soit $2x + y - 12 = 0$. (1,5 pt) (1,25)
- d) Le centre est le milieu I de $[BC]$: $I(4; 5)$. $BC^2 = (3 - 5)^2 + (6 - 4)^2 = 8$, donc le rayon vaut $\frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. Équation : $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 2$. (1 pt) (1,25)

Astuce — Une hauteur est perpendiculaire à un côté : le vecteur de ce côté sert directement de vecteur normal, sans passer par un vecteur directeur.

Exercice 4 – Cercle trigonométrique et produit scalaire**(5 pts)**

- a) $\frac{17\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$: la mesure principale est $\frac{\pi}{4}$. (1 pt) (1)
- b) $\cos\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. (1 pt) (1)
- c) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$. Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x \leq 0$, donc $\cos x = -\frac{4}{5}$. (1 pt) (1)
- d) $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{4}{5}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = -\frac{4}{5}$. (1 pt) (1)
- e) $M(\cos x; \sin x) = \left(-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, donc $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = -\frac{4}{5} \times 4 + \frac{3}{5} \times 3 = -\frac{16}{5} + \frac{9}{5} = -\frac{7}{5}$. Ce produit est strictement négatif, donc le cosinus de $\widehat{MOP}$ l'est aussi : l'angle est obtus. (1 pt) (1)

Piège — La relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donne deux valeurs possibles pour $\cos x$: c'est l'intervalle où se trouve x qui fixe le signe.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).