

Devoir surveillé – Probabilités conditionnelles, indépendance et variables aléatoires — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Soit A et B deux événements indépendants. Démontrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.
- b) Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$, et $\mu = E(X)$. Démontrer la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - \mu^2$.
- c) Démontrer que, pour tous réels a et b , $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- d) Soit A et B deux événements avec $\$0$

Exercice 2 – Problème — Un détecteur de pièces défectueuses

(4 pts)

- a) Dans une usine, 3 % des pièces sont défectueuses (D). Un détecteur déclenche une alarme (A) pour 98 % des pièces défectueuses et pour une proportion q des pièces conformes, avec $\$0$
- b) En déduire $P_A(D)$ en fonction de q , et étudier le sens de variation de $q \mapsto P_A(D)$ sur $]0; 1[$. Interpréter.
- c) Le fabricant veut qu'au moins 80 % des alarmes concernent des pièces défectueuses. Déterminer les valeurs de q qui conviennent.
- d) On prend $q = 0,005$. Vérifier que l'exigence du fabricant est satisfaite, puis calculer la probabilité qu'un lot de 3 pièces, dont les passages au détecteur sont indépendants, ne déclenche aucune alarme (arrondir à 10^{-4}).

Exercice 3 – Le jeu du premier six

(4 pts)

- a) On lance un dé équilibré à six faces au plus trois fois, en s'arrêtant dès qu'on obtient un 6. Les lancers sont indépendants. On note X le nombre de lancers effectués. Déterminer la loi de X en justifiant que $P(X = 3) = \frac{25}{36}$.
- b) Calculer $E(X)$.
- c) Le joueur reçoit 12 € si le 6 sort au premier lancer, 6 € s'il sort au deuxième, 3 € s'il sort au troisième, et rien si aucun 6 ne sort. On note R la somme reçue. Déterminer la loi de R et montrer que $E(R) = \frac{229}{72}$.
- d) Le joueur paie une mise m pour jouer. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.
- e) Calculer $\sigma(R)$ arrondi au centième. L'organisateur double ensuite tous les montants reçus et fixe la mise à 7 €. Calculer l'espérance et l'écart type du nouveau gain net.

Exercice 4 – Trouver le paramètre*(3 pts)*

- a) Un lycée compte 400 élèves, dont 250 filles (F) et 160 élèves pratiquant un sport en club (S). On note x le nombre de filles pratiquant un sport en club. Justifier que $10 \leq x \leq 160$.
- b) On choisit un élève au hasard. Exprimer $P_F(S)$ et $P_S(F)$ en fonction de x .
- c) Déterminer x pour que F et S soient indépendants. Ces deux événements peuvent-ils être incompatibles ?
- d) Pour cette valeur de x , calculer $P(\overline{F} \cap \overline{S})$ de deux façons différentes.

Exercice 5 – Pour aller plus loin*(5 pts)*

- a) Un stock de composants provient à 60 % d'un fournisseur A et à 40 % d'un fournisseur B ; 90 % des composants de A et 75 % de ceux de B sont conformes. Montrer qu'un composant pris au hasard est conforme avec la probabilité $p = 0,84$.
- b) On prélève 3 composants, et l'on admet que les prélèvements sont indépendants. On note X le nombre de composants conformes. Dans cette question et la suivante, p désigne un réel quelconque de $]0 ; 1[$. Donner la loi de X en fonction de p .
- c) Démontrer que $E(X) = 3p$ et $V(X) = 3p(1 - p)$. Donner leurs valeurs pour $p = 0,84$.
- d) Pour quelle valeur de p la variance $V(X)$ est-elle maximale ? Interpréter.
- e) Recherche : reprendre les calculs avec 2 prélèvements au lieu de 3, puis conjecturer $E(X)$ et $V(X)$ pour n prélèvements indépendants.
- f) Retour à $p = 0,84$ et à 3 prélèvements : chaque composant non conforme coûte 15 € à remplacer. On note C le coût total. Exprimer C en fonction de X , puis calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$ (arrondi au centime).

Bon courage !