

Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles, indépendance et variables aléatoires — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B})$: $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants. (1 pt) (1)
- b) $V(X) = \sum p_i(x_i - \mu)^2 = \sum p_i x_i^2 - 2\mu \sum p_i x_i + \mu^2 \sum p_i = E(X^2) - 2\mu \times \mu + \mu^2 \times 1 = E(X^2) - \mu^2$, car $\sum p_i x_i = \mu$ et $\sum p_i = 1$. (1 pt) (1)
- c) $aX + b$ prend les valeurs $ax_i + b$ avec les probabilités p_i , et $E(aX + b) = a\mu + b$. Donc $V(aX + b) = \sum p_i(ax_i + b - a\mu - b)^2 = \sum p_i a^2(x_i - \mu)^2 = a^2 V(X)$. (1 pt) (1)
- d) Probabilités totales : $P(B) = P(A)P_A(B) + (1 - P(A))P_{\overline{A}}(B)$. Si $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = c$, alors $P(B) = c(P(A) + 1 - P(A)) = c = P_A(B)$, d'où $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B)$: indépendance. Réciproquement, si A et B sont indépendants, $P_A(B) = P(B)$ et $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(\overline{A})P(B)$, donc $P_{\overline{A}}(B) = P(B)$: les deux probabilités conditionnelles sont égales. (1 pt) (1)

Astuce — Dans un arbre, l'indépendance se lit directement : les branches issues de A et de $\overline{A}$ portent la même probabilité vers B .

Exercice 2 – Problème — Un détecteur de pièces défectueuses

(4 pts)

- a) D et $\overline{D}$ forment une partition : $P(A) = 0,03 \times 0,98 + 0,97q = 0,0294 + 0,97q$. (0,5 pt) (1)
- b) $P_A(D) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} = \frac{0,0294}{0,0294 + 0,97q}$. Le dénominateur est positif et croissant en q , le numérateur est une constante positive : $P_A(D)$ décroît quand q augmente. Plus le détecteur donne de fausses alarmes, moins une alarme est fiable. (1 pt) (1)
- c) Le dénominateur étant positif : $\frac{0,0294}{0,0294 + 0,97q} \geq 0,8 \iff 0,0294 \geq 0,02352 + 0,776q \iff 0,00588 \geq 0,776q \iff q \leq \frac{0,00588}{0,776} \approx 0,00758$. Le taux de fausses alarmes doit être au plus d'environ 0,76 %, soit $q \in \left] 0; \frac{0,00588}{0,776} \right]$. (1,5 pt) (1)
- d) $0,005 < 0,00758$: l'exigence est satisfaite ; en effet $P(A) = 0,0294 + 0,97 \times 0,005 = 0,03425$ et $P_A(D) = \frac{0,0294}{0,03425} \approx 0,858 \geq 0,8$. Par indépendance des trois passages : $P(\text{aucune alarme}) = (1 - 0,03425)^3 = 0,96575^3 \approx 0,9007$. (1 pt) (1)

Piège — Un détecteur très sensible peut être peu fiable : quand les défauts sont rares, même un faible taux de fausses alarmes fait chuter $P_A(D)$.

Exercice 3 – Le jeu du premier six

(4 pts)

- a) $P(X = 1) = \frac{1}{6}$; $P(X = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. On effectue un troisième lancer dès que les deux premiers ne donnent pas 6, quel que soit son résultat : $P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$. Contrôle : $\frac{6 + 5 + 25}{36} = 1$. (1 pt) (0,8)
- b) $E(X) = 1 \times \frac{6}{36} + 2 \times \frac{5}{36} + 3 \times \frac{25}{36} = \frac{6 + 10 + 75}{36} = \frac{91}{36} \approx 2,53$ lancers. (0,5 pt) (0,8)
- c) $P(R = 12) = \frac{1}{6} = \frac{36}{216}$; $P(R = 6) = \frac{5}{36} = \frac{30}{216}$; $P(R = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$; $P(R = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$ (somme : $\frac{216}{216} = 1$). $E(R) = \frac{12 \times 36 + 6 \times 30 + 3 \times 25}{216} = \frac{432 + 180 + 75}{216} = \frac{687}{216} = \frac{229}{72}$. (1 pt) (0,8)
- d) Le gain net est $G = R - m$, donc $E(G) = E(R) - m$. Jeu équitable $\iff E(G) = 0 \iff m = \frac{229}{72} \approx 3,18$ €. (0,5 pt) (0,8)
- e) $E(R^2) = \frac{144 \times 36 + 36 \times 30 + 9 \times 25}{216} = \frac{6489}{216} \approx 30,042$; $V(R) = \frac{6489}{216} - \left(\frac{229}{72}\right)^2 \approx 30,042 - 10,116 \approx 19,93$, d'où $\sigma(R) \approx 4,46$. Nouveau gain net : $G' = 2R - 7$, donc $E(G') = \frac{229}{36} - 7 = -\frac{23}{36} \approx -0,64$ € (jeu défavorable au joueur) et $\sigma(G') = 2\sigma(R) \approx 8,93$ €. (1 pt) (0,8)

Erreur fréquente — « Trois lancers » ne veut pas dire « un 6 au troisième lancer » : l'événement $\{X = 3\}$ contient aussi les parties sans aucun 6, d'où $\frac{25}{36}$ et non $\frac{25}{216}$.

Exercice 4 – Trouver le paramètre

(3 pts)

- a) Les garçons sportifs sont au nombre de $160 - x$, et il n'y a que $400 - 250 = 150$ garçons : $160 - x \leq 150$, soit $x \geq 10$. De plus $x \leq 160$, car les filles sportives font partie des 160 sportifs. (0,5 pt) (0,75)
- b) $P_F(S) = \frac{x}{250}$ et $P_S(F) = \frac{x}{160}$. (0,5 pt) (0,75)
- c) $P(F) \neq 0$, donc F et S indépendants $\iff P_F(S) = P(S) \iff \frac{x}{250} = \frac{160}{400} = 0,4 \iff x = 100$. Incompatibles signifierait $x = 0$, ce qui est exclu puisque $x \geq 10$: c'est impossible. (1 pt) (0,75)
- d) Par les effectifs : garçons non sportifs = $150 - (160 - 100) = 90$, donc $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = \frac{90}{400} = 0,225$. Par l'indépendance de $\overline{F}$ et $\overline{S}$ (conséquence de celle de F et S) : $P(\overline{F})P(\overline{S}) = \frac{150}{400} \times \frac{240}{400} = 0,375 \times 0,6 = 0,225$. (1 pt) (0,75)

Méthode — Pour tester l'indépendance sur un tableau, comparer une fréquence conditionnelle à la fréquence globale : la part de sportives chez les filles doit égaler la part de sportifs dans tout le lycée.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(5 pts)**

- a) Probabilités totales avec la partition $\{A, \bar{A}\}$: $p = 0,6 \times 0,9 + 0,4 \times 0,75 = 0,54 + 0,3 = 0,84$. (0,5 pt) (0,833333)
- b) Trois épreuves de Bernoulli indépendantes de succès « conforme », de probabilité p . Arbre à 8 chemins : $P(X = 0) = (1 - p)^3$; $P(X = 1) = 3p(1 - p)^2$ et $P(X = 2) = 3p^2(1 - p)$ (trois chemins à chaque fois) ; $P(X = 3) = p^3$. (1 pt) (0,833333)
- c) $E(X) = 3p(1 - p)^2 + 6p^2(1 - p) + 3p^3 = 3p[(1 - p)^2 + 2p(1 - p) + p^2] = 3p[(1 - p) + p]^2 = 3p$.
 $E(X^2) = 3p(1 - p)^2 + 12p^2(1 - p) + 9p^3 = 3p[1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 3p^2] = 3p(1 + 2p)$, donc
 $V(X) = 3p + 6p^2 - (3p)^2 = 3p - 3p^2 = 3p(1 - p)$. Pour $p = 0,84$: $E(X) = 2,52$ et $V(X) = 3 \times 0,84 \times 0,16 = 0,4032$. (1 pt) (0,833333)
- d) $3p(1 - p) = -3p^2 + 3p = -3\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$: maximum $\frac{3}{4}$ atteint pour $p = \frac{1}{2}$. La dispersion du nombre de succès est la plus grande quand succès et échec sont également probables. (0,5 pt) (0,833333)
- e) Avec 2 prélèvements, la loi est $(1 - p)^2$; $2p(1 - p)$; p^2 . $E(X) = 2p(1 - p) + 2p^2 = 2p$; $E(X^2) = 2p(1 - p) + 4p^2 = 2p + 2p^2$, donc $V(X) = 2p + 2p^2 - 4p^2 = 2p(1 - p)$. Conjecture : pour n prélèvements indépendants, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$. (1 pt) (0,833333)
- f) Il y a $3 - X$ composants non conformes : $C = 15(3 - X) = 45 - 15X$. $E(C) = 45 - 15 \times 2,52 = 45 - 37,8 = 7,2$, soit 7,20 € ; $\sigma(C) = | -15 | \times \sqrt{0,4032} \approx 15 \times 0,63498 \approx 9,52$ €. (1 pt) (0,833333)

Astuce — Factoriser par $3p$ avant de développer allège le calcul : la somme entre crochets se reconnaît souvent comme une identité remarquable.