

Devoir surveillé – Probabilités conditionnelles, indépendance et variables aléatoires — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a) A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,2$. Calculer $P(A \cup B)$.
- b) On donne $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,12$. Calculer $P_B(A)$.
- c) On donne $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,5$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$. Calculer $P(B)$.
- d) X prend les valeurs -1 , 0 et 3 avec les probabilités respectives $0,3$; $0,5$ et $0,2$. Calculer $E(X)$.
- e) Calculer $V(X)$ pour la variable de la question d).
- f) Une variable Y vérifie $V(Y) = 4$. Calculer $V(-3Y + 7)$ et $\sigma(-3Y + 7)$.

Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Léa affirme : « Pour tous événements A et B de probabilités non nulles, $P_A(B) = P_B(A)$. » A-t-elle raison ?
- b) A et B sont indépendants, avec $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,5$. Tom écrit : « $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,4 - 0,5 = 0,1$. » Corriger son raisonnement.
- c) Une variable X prend ses valeurs parmi 1 , 2 et 3 , et $E(X) = 2$. Inès affirme : « X prend donc le plus souvent la valeur 2 . » A-t-elle raison ?
- d) Hugo écrit : « $V(2X + 5) = 2V(X) + 5$. » Corriger cette égalité et la justifier à partir de la définition de la variance.

Exercice 3 – Dépistage : les faux positifs

(4 pts)

- a) Une maladie touche 2% d'une population. Un test est positif (T) pour 95% des personnes malades (M) et pour 4% des personnes non malades. On choisit une personne au hasard. Construire l'arbre pondéré et montrer que $P(T) = 0,0582$.
- b) Le test d'une personne est positif. Calculer la probabilité qu'elle soit malade (arrondir au millième) et commenter.
- c) Le test d'une personne est négatif. Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas malade (arrondir à 10^{-4}).
- d) Trois personnes choisies au hasard, de façon indépendante, passent le test. Calculer la probabilité qu'au moins l'une d'elles obtienne un test positif (arrondir au millième).

Exercice 4 – Répondre au hasard**(4 pts)**

- a) Un questionnaire comporte 3 questions ; chacune propose 4 réponses dont une seule est juste. Un élève répond à chaque question au hasard, indépendamment. On note X le nombre de bonnes réponses. À l'aide d'un arbre, justifier que $P(X = 0) = \frac{27}{64}$.
- b) Déterminer la loi de probabilité de X .
- c) Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.
- d) Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise en retire 1. On note N la note obtenue. Montrer que $N = 3X - 3$, puis calculer $E(N)$ et $\sigma(N)$.
- e) Combien de points faudrait-il retirer par mauvaise réponse pour que la note moyenne d'un élève répondant au hasard soit nulle ?

Exercice 5 – Problème — Location de vélos**(5 pts)**

- a) Une plateforme loue des vélos : 70 % des locations concernent un vélo électrique (E), les autres un vélo classique. Une location est longue (L) dans 40 % des cas pour un vélo électrique et dans 20 % des cas pour un vélo classique. On choisit une location au hasard. Construire l'arbre pondéré et calculer $P(L)$.
- b) Une location est longue. Calculer la probabilité qu'elle concerne un vélo électrique (valeur exacte, puis arrondie au centième).
- c) Le prix X d'une location, en euros, vaut 2 pour une location courte en vélo classique, 5 pour une location longue en vélo classique, 4 pour une location courte en vélo électrique et 9 pour une location longue en vélo électrique. Déterminer la loi de X .
- d) Calculer $E(X)$ et interpréter.
- e) Calculer $V(X)$, puis $\sigma(X)$ arrondi au centième.
- f) Lors d'une opération commerciale, chaque prix est réduit de 20 %, puis majoré de 1 € de frais de réservation. On note Y le nouveau prix. Exprimer Y en fonction de X , puis calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Bon courage !