

# Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles, indépendance et variables aléatoires — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1<sup>re</sup>

## Exercice 1 – Automatismes

(3 pts)

- a)  $P(A \cap B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ , donc  $P(A \cup B) = 0,7 + 0,2 - 0,14 = 0,76$ . (0,5 pt) (0,5)
- b)  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,3} = 0,4$ . (0,5 pt) (0,5)
- c) Probabilités totales :  $P(B) = 0,3 \times 0,5 + 0,7 \times 0,2 = 0,15 + 0,14 = 0,29$ . (0,5 pt) (0,5)
- d)  $E(X) = -1 \times 0,3 + 0 \times 0,5 + 3 \times 0,2 = -0,3 + 0,6 = 0,3$ . (0,5 pt) (0,5)
- e)  $E(X^2) = 1 \times 0,3 + 0 \times 0,5 + 9 \times 0,2 = 2,1$  ; König-Huygens :  $V(X) = 2,1 - 0,3^2 = 2,1 - 0,09 = 2,01$ . (0,5 pt) (0,5)
- f)  $V(-3Y + 7) = (-3)^2 \times 4 = 36$  et  $\sigma(-3Y + 7) = \sqrt{36} = 6$  (soit  $|-3| \times \sigma(Y) = 3 \times 2$ ). (0,5 pt) (0,5)

**Piège** — Dans  $V(aX + b)$ , la constante  $b$  disparaît et  $a$  est élevé au carré : une variance n'est jamais négative, même si  $a < 0$ .

## Exercice 2 – Qui a raison ?

(4 pts)

- a) Non. Contre-exemple :  $P(A) = 0,5$ ,  $P(B) = 0,2$  et  $P(A \cap B) = 0,1$  donnent  $P_A(B) = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$  mais  $P_B(A) = \frac{0,1}{0,2} = 0,5$ . Les deux quotients ont le même numérateur ; lorsque  $P(A \cap B) \neq 0$ , ils ne sont égaux que si  $P(A) = P(B)$ . (1 pt) (1)
- b) Tom raisonne comme si  $A$  et  $B$  étaient incompatibles. Or  $A$  et  $B$  étant indépendants,  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  le sont aussi :  $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \times 0,5 = 0,3$ . Vérification :  $P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$  et  $1 - 0,7 = 0,3$ . (1 pt) (1)
- c) Non. Avec  $P(X = 1) = P(X = 3) = 0,5$  et  $P(X = 2) = 0$ , on a  $E(X) = 0,5 + 1,5 = 2$ , et pourtant  $X$  ne vaut jamais 2. L'espérance est une moyenne à long terme, pas la valeur la plus probable. (1 pt) (1)
- d) Si  $X$  prend les valeurs  $x_i$  avec les probabilités  $p_i$  et  $\mu = E(X)$ , alors  $E(2X + 5) = 2\mu + 5$  et  $V(2X + 5) = \sum p_i (2x_i + 5 - (2\mu + 5))^2 = \sum p_i \times 4(x_i - \mu)^2 = 4V(X)$ . Ajouter 5 décale les valeurs sans modifier leur dispersion ; multiplier par 2 multiplie les écarts par 2, donc leurs carrés par 4. (1 pt) (1)

**Erreur fréquente** — Confondre incompatibles ( $P(A \cap B) = 0$ ) et indépendants ( $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ) : ce sont deux notions différentes, qui ne se déduisent pas l'une de l'autre.

**Exercice 3 – Dépistage : les faux positifs**

(4 pts)

- a) Arbre :  $P(M) = 0,02$ ,  $P_M(T) = 0,95$ ,  $P_{\overline{M}}(T) = 0,04$ .  $M$  et  $\overline{M}$  forment une partition :  $P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582$ . (1 pt) (1)
- b)  $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,019}{0,0582} \approx 0,326$ . Seul un test positif sur trois environ concerne un malade : la maladie est rare, et les 4 % de faux positifs portent sur 98 % de la population, ce qui fournit plus de positifs non malades (0,0392) que de positifs malades (0,019). (1 pt) (1)
- c)  $P(\overline{T}) = 1 - 0,0582 = 0,9418$  et  $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,98 \times 0,96 = 0,9408$ . Donc  $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{0,9408}{0,9418} \approx 0,9989$  : un test négatif est très rassurant. (1 pt) (1)
- d) Les trois tests sont des épreuves indépendantes ; la probabilité qu'aucun ne soit positif est  $0,9418^3 \approx 0,8354$ . Donc la probabilité d'au moins un test positif vaut  $1 - 0,9418^3 \approx 0,165$ . (1 pt) (1)

**Méthode** — Pour inverser le conditionnement, calculer d'abord  $P(T)$  par les probabilités totales, puis

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} : \text{c'est lire l'arbre « à l'envers »}.$$

**Exercice 4 – Répondre au hasard**

(4 pts)

- a) Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « réponse juste », de probabilité  $\frac{1}{4}$  ; les 3 épreuves sont indépendantes. Un seul chemin de l'arbre ne comporte aucun succès :  $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ . (0,5 pt) (0,8)
- b) Trois chemins pour 1 succès :  $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$  ; trois chemins pour 2 succès :  $P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$  ;  $P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ . Contrôle :  $27 + 27 + 9 + 1 = 64$ . (0,5 pt) (0,8)
- c)  $E(X) = \frac{0 \times 27 + 1 \times 27 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$ .  $E(X^2) = \frac{27 + 4 \times 9 + 9 \times 1}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$ , donc  $V(X) = \frac{9}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{18}{16} - \frac{9}{16} = \frac{9}{16}$ . (1 pt) (0,8)
- d) Il y a  $X$  bonnes réponses et  $3 - X$  mauvaises :  $N = 2X - (3 - X) = 3X - 3$ .  $E(N) = 3 \times \frac{3}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$  ;  $V(N) = 3^2 \times \frac{9}{16} = \frac{81}{16}$ , d'où  $\sigma(N) = \frac{9}{4}$ . (1 pt) (0,8)
- e) Avec un retrait de  $k$  points par mauvaise réponse :  $N = 2X - k(3 - X) = (2 + k)X - 3k$ , donc  $E(N) = \frac{3}{4}(2 + k) - 3k$ .  $E(N) = 0 \iff 3(2 + k) = 12k \iff 6 = 9k \iff k = \frac{2}{3}$ . Il faut retirer  $\frac{2}{3}$  de point par mauvaise réponse. (1 pt) (0,8)

**Astuce** — Exprimer une note ou un gain sous la forme  $aX + b$  donne espérance et écart type sans refaire de loi :  $E(aX + b) = aE(X) + b$  et  $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$ .

**Exercice 5 – Problème — Location de vélos***(5 pts)*

- a) Arbre :  $P(E) = 0,7$ ,  $P_E(L) = 0,4$  ;  $P(\overline{E}) = 0,3$ ,  $P_{\overline{E}}(L) = 0,2$ . Probabilités totales :  $P(L) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,2 = 0,28 + 0,06 = 0,34$ . (1 pt) (0,833333)
- b)  $P_L(E) = \frac{P(E \cap L)}{P(L)} = \frac{0,28}{0,34} = \frac{14}{17} \approx 0,82$ . (0,5 pt) (0,833333)
- c)  $P(X = 2) = P(\overline{E} \cap \overline{L}) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$  ;  $P(X = 4) = P(E \cap \overline{L}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$  ;  $P(X = 5) = P(\overline{E} \cap L) = 0,06$  ;  $P(X = 9) = P(E \cap L) = 0,28$ . Contrôle :  $0,24 + 0,42 + 0,06 + 0,28 = 1$ . (1 pt) (0,833333)
- d)  $E(X) = 2 \times 0,24 + 4 \times 0,42 + 5 \times 0,06 + 9 \times 0,28 = 0,48 + 1,68 + 0,3 + 2,52 = 4,98$ . Sur un grand nombre de locations, le prix moyen d'une location est d'environ 4,98 €. (0,5 pt) (0,833333)
- e)  $E(X^2) = 4 \times 0,24 + 16 \times 0,42 + 25 \times 0,06 + 81 \times 0,28 = 0,96 + 6,72 + 1,5 + 22,68 = 31,86$ .  
König-Huygens :  $V(X) = 31,86 - 4,98^2 = 31,86 - 24,8004 = 7,0596$  ;  $\sigma(X) = \sqrt{7,0596} \approx 2,66$ . (1 pt) (0,833333)
- f) Réduire de 20 % revient à multiplier par 0,8 :  $Y = 0,8X + 1$ .  $E(Y) = 0,8 \times 4,98 + 1 = 4,984$ , soit environ 4,98 € ;  $\sigma(Y) = 0,8 \sigma(X) \approx 0,8 \times 2,657 \approx 2,13$  € (les frais fixes ne modifient pas la dispersion). (1 pt) (0,833333)

**Méthode** — Présenter la loi dans un tableau et vérifier que la somme des probabilités vaut 1 avant tout calcul d'espérance : une erreur de lecture de l'arbre se repère immédiatement.