

Corrigé et barème – Probabilités conditionnelles, indépendance et variables aléatoires — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$. (1 pt) (1)
- b) Par indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$. (1 pt) (1)
- c) $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4$. (1 pt) (1)
- d) $E(X) = 0 \times 0,5 + 2 \times 0,3 + 5 \times 0,2 = 0 + 0,6 + 1 = 1,6$. (1 pt) (1)
- e) Par linéarité de l'espérance, $E(2X - 1) = 2E(X) - 1 = 2 \times 1,6 - 1 = 2,2$. (1 pt) (1)

Méthode — Trois formules à connaître par cœur : $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$ toujours, $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ seulement si A et B sont indépendants, et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exercice 2 – Tableau croisé et indépendance

(5 pts)

- a) Ligne M : 84 et $120 - 84 = 36$ (total 120). Ligne $\overline{M}$: $150 - 84 = 66$ et $120 - 66 = 54$ (total $240 - 120 = 120$). Totaux des colonnes : 150 et $240 - 150 = 90$; contrôle : $36 + 54 = 90$. Total général : 240. (1,5 pt) (1,25)
- b) $P(M \cap D) = \frac{84}{240} = 0,35$; $P(M \cup D) = P(M) + P(D) - P(M \cap D) = \frac{120 + 150 - 84}{240} = \frac{186}{240} = 0,775$. (1 pt) (1,25)
- c) $P_D(M) = \frac{84}{150} = 0,56$: 56 % des demi-pensionnaires suivent la spécialité mathématiques.
 $P_M(D) = \frac{84}{120} = 0,7$: 70 % des élèves de spécialité mathématiques sont demi-pensionnaires. (1,5 pt) (1,25)
- d) $P(M) \times P(D) = \frac{120}{240} \times \frac{150}{240} = 0,5 \times 0,625 = 0,3125$, alors que $P(M \cap D) = 0,35$. Les deux nombres diffèrent : M et D ne sont pas indépendants. (On peut aussi constater que $P_D(M) = 0,56 \neq P(M) = 0,5$.) (1 pt) (1,25)

Piège — $P_D(M)$ et $P_M(D)$ ont le même numérateur mais pas le même dénominateur : on divise toujours par l'effectif de l'événement qui conditionne, celui écrit en indice.

Exercice 3 – Trois feux sur un trajet

(5 pts)

- a) Arbre à trois niveaux : à chaque nœud, V (vert) avec 0,4 et $\bar{V}$ avec 0,6, soit 8 chemins. Les épreuves étant indépendantes, on multiplie les probabilités le long du chemin VVV : $P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064$. (1 pt) (1)
- b) $P(X = 0) = 0,6^3 = 0,216$. « Au moins un feu vert » est l'événement contraire de « aucun feu vert » : $P(X \geq 1) = 1 - 0,216 = 0,784$. (1 pt) (1)
- c) Trois chemins comportent un seul feu vert ($V\bar{V}\bar{V}$, $\bar{V}V\bar{V}$, $\bar{V}\bar{V}V$), chacun de probabilité $0,4 \times 0,6^2 = 0,144$. Donc $P(X = 1) = 3 \times 0,144 = 0,432$. (1 pt) (1)
- d) Trois chemins comportent deux feux verts, chacun de probabilité $0,4^2 \times 0,6 = 0,096$: $P(X = 2) = 3 \times 0,096 = 0,288$. Loi de X : valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 avec les probabilités 0,216 ; 0,432 ; 0,288 ; 0,064 (somme égale à 1). (1 pt) (1)
- e) $E(X) = 0 \times 0,216 + 1 \times 0,432 + 2 \times 0,288 + 3 \times 0,064 = 0,432 + 0,576 + 0,192 = 1,2$. Sur un grand nombre de trajets, Nadia rencontre en moyenne 1,2 feu vert par trajet. (1 pt) (1)

Astuce — Pour « au moins un », passer par l'événement contraire « aucun » : un seul chemin à calculer au lieu de sept.

Exercice 4 – Problème — Un jeu de kermesse

(5 pts)

- a) Premier niveau : R avec $\frac{3}{5}$ et $\bar{R}$ avec $\frac{2}{5}$. Après R : G avec $\frac{1}{3}$, $\bar{G}$ avec $\frac{2}{3}$. Après $\bar{R}$: G avec $\frac{1}{2}$, $\bar{G}$ avec $\frac{1}{2}$. (1 pt) (1)
- b) $P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} = 0,2$. (0,5 pt) (1)
- c) R et $\bar{R}$ forment une partition ; formule des probabilités totales : $P(G) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$. (1 pt) (1)
- d) $P_G(R) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$. (1 pt) (1)
- e) X vaut $4 - 2 = 2$ avec la probabilité 0,4 et -2 avec la probabilité 0,6. $E(X) = 2 \times 0,4 + (-2) \times 0,6 = 0,8 - 1,2 = -0,4$. L'espérance est négative : en moyenne, le joueur perd 0,40 € par partie, le jeu lui est défavorable. (1,5 pt) (1)

Erreur fréquente — Le gain net retrace la mise : avec 4 € reçus pour 2 € misés, on gagne 2 € et non 4 €, et une partie perdue vaut -2 €, pas 0.