Devoir surveillé – Fonction exponentielle et trigonométrie — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Simplifier, pour tout réel $x \neq 0$: $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{x}-1}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} + 3e^{x} - 4 \leqslant 0$ (on pourra poser $X = e^{x}$).

c) Déterminer la mesure principale de $\dfrac{2027\pi}{3}$.

d) Calculer, sans aucune valeur approchée, $S = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

On rappelle que $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $\exp' = \exp$, $\exp(0) = 1$ et que, pour tout réel x, $e^{x} \times e^{-x} = 1$.

a) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. En étudiant $q(x) = f(x)\,e^{-x}$, démontrer que $f = \exp$.

b) Soit a un réel. Démontrer que la seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = af$ et $f(0) = 1$ est $t \mapsto e^{at}$.

c) Soit M et M' les points images de $\dfrac{\pi}{6}$ et de $-\dfrac{\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique de centre O. Démontrer que le triangle OMM' est équilatéral, puis en déduire les valeurs exactes de $\sin\dfrac{\pi}{6}$ et $\cos\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 3 – Pour aller plus loin — Encadrer e et π *(5 pts)*

On admet (cours) que, pour tout réel x, $e^{x} \geqslant 1 + x$.

a) Démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^{x} \geqslant 1 + x + \dfrac{x^{2}}{2}$.

b) Soit $n \geqslant 1$ un entier. En appliquant l'inégalité admise $e^{x} \geqslant 1 + x$ à $x = \dfrac{1}{n}$, puis à $x = -\dfrac{1}{n+1}$, démontrer que $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \leqslant e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

c) Avec $n = 5$, en déduire que $2{,}48$

d) Le cercle trigonométrique a pour périmètre 2π. On admet qu'il est plus long que le périmètre de tout polygone inscrit et plus court que celui de tout polygone circonscrit, et que $\pi > 3$ (hexagone régulier inscrit, de côté 1). À l'aide de l'hexagone régulier circonscrit, démontrer que $\pi < 2\sqrt{3}$.

e) Ranger e, 3 et π dans l'ordre croissant, puis montrer que $e^{\pi} > 20$ (on donne $e^{3} \approx 20{,}09$).

f) Généraliser : montrer que le polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 3$) inscrit dans le cercle trigonométrique a pour périmètre $2n\sin\dfrac{\pi}{n}$, et en déduire que $n\sin\dfrac{\pi}{n} < \pi$.

Exercice 4 – Problème — La spirale du nautile *(5 pts)*

Dans un repère orthonormé d'origine O (unité : le cm), on modélise la coquille d'un nautile par une spirale : pour tout réel $\theta \geqslant 0$, le point $M(\theta)$ est situé à la distance $r(\theta) = e^{k\theta}$ de O, sur la demi-droite d'origine O passant par le point image de θ sur le cercle trigonométrique ; ainsi $M(\theta)$ a pour coordonnées $(r(\theta)\cos\theta\,;\, r(\theta)\sin\theta)$. On observe qu'à chaque demi-tour, la distance au centre est multipliée par e.

a) Déterminer k.

b) Donner les coordonnées exactes de $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et de $M\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

c) Démontrer que la distance $r(\theta)$ augmente avec θ.

d) Déterminer les réels θ de $[0\,;4\pi]$ pour lesquels $M(\theta)$ est sur la droite d'équation $y = x$, et donner les coordonnées exactes de celui qui est le plus proche de O dans le quart de plan $x < 0$, $y < 0$.

e) On donne $e^4 \approx 54{,}6$ et $e^5 \approx 148{,}4$. Déterminer le plus petit $\theta \geqslant 0$ pour lequel $M(\theta)$ est sur l'axe des abscisses et à plus de 1 m de O ; préciser ses coordonnées.

f) Montrer que, pour tout $\theta \geqslant 0$, $M(\theta)M(\theta+\pi) = (1+e)\,e^{\theta/\pi}$.

Exercice 5 – Un minimum à trouver *(3 pts)*

Pour tout réel t, on pose $F(t) = e^{2\cos t} - 2e^{\cos t}$.

a) Démontrer que, pour tout réel t, $\dfrac{1}{e} \leqslant e^{\cos t} \leqslant e$.

b) Déterminer le minimum de F sur $\mathbb{R}$ et tous les réels t en lesquels il est atteint.

c) Déterminer le maximum de F sur $\mathbb{R}$ et les réels en lesquels il est atteint (on pourra comparer $e-1$ et $1-\dfrac{1}{e}$).

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).