Corrigé et barème – Fonction exponentielle et trigonométrie — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $e^{2x}-1=(e^x)^2-1=(e^x-1)(e^x+1)$; pour $x\neq 0$, $e^x\neq 1$, on simplifie : le quotient vaut e^x+1. (0,5 pt) (0,75)

b) Avec $X=e^x>0$: $X^2+3X-4=(X-1)(X+4)$. Comme $X+4>0$, l'inéquation équivaut à $X-1\leqslant 0$, soit $e^x\leqslant e^0$, donc $x\leqslant 0$ (exp strictement croissante). $\mathcal{S}=]-\infty\,;0]$. (1 pt) (0,75)

c) $\dfrac{2027\pi}{3}=\dfrac{2028\pi-\pi}{3}=676\pi-\dfrac{\pi}{3}$, et $676\pi=338\times 2\pi$ est un nombre entier de tours : mesure principale $-\dfrac{\pi}{3}$. (0,5 pt) (0,75)

d) $\cos(\pi-x)=-\cos x$ donne $\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\cos\dfrac{\pi}{7}$, $\cos\dfrac{5\pi}{7}=-\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}=-\cos\dfrac{3\pi}{7}$: les termes s'annulent deux à deux, $S=0$. (1 pt) (0,75)

Astuce — Une somme de cosinus d'angles « symétriques » autour de $\dfrac{\pi}{2}$ se simplifie par $\cos(\pi-x)=-\cos x$: chercher les paires avant de calculer.

Exercice 2 – Démontrer *(4 pts)*

a) La dérivée de $x\mapsto e^{-x}$ est $x\mapsto -e^{-x}$ (e^{at} avec $a=-1$). Produit : $q'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=f(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=0$. q est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à $q(0)=f(0)e^0=1$. Ainsi $f(x)e^{-x}=1$, et comme $e^x\times e^{-x}=1$, $f(x)=\dfrac{1}{e^{-x}}=e^x$ pour tout réel x : $f=\exp$. (0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt) (1,33333)

b) $t\mapsto e^{at}$ convient : sa dérivée est $t\mapsto ae^{at}$ et $e^0=1$. Réciproquement, soit f une telle fonction et $q(t)=f(t)e^{-at}$. Avec $\left(e^{-at}\right)'=-ae^{-at}$: $q'(t)=af(t)e^{-at}-af(t)e^{-at}=0$, donc q est constante, égale à $q(0)=1$, et $f(t)=\dfrac{1}{e^{-at}}=e^{at}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1,33333)

c) $OM=OM'=1$ (rayons) et $\widehat{MOM'}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$: le triangle est isocèle en O, ses angles à la base valent $\dfrac{1}{2}\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$, il est équilatéral et $MM'=1$. $M\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\,;\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $M'\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\,;-\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, avec $\sin\dfrac{\pi}{6}>0$: $MM'=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$, d'où $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$. Puis $\cos^2\dfrac{\pi}{6}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ et l'abscisse de M est positive : $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt) (1,33333)

Méthode — Pour montrer qu'une fonction est constante, on prouve que sa dérivée est nulle sur un intervalle, puis on calcule sa valeur en un point bien choisi, souvent 0.

Exercice 3 – Pour aller plus loin — Encadrer e et π *(5 pts)*

a) Soit $k(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;+\infty[$. $k'(x) = e^x - 1 - x \geqslant 0$ d'après l'inégalité admise : k est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Donc, pour $x \geqslant 0$, $k(x) \geqslant k(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$, c'est-à-dire $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$. (1 pt) (0,833333)

b) $x = \dfrac{1}{n}$: $e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n} > 0$; deux nombres positifs rangés dans le même ordre que leurs puissances n-ièmes, et $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e$, donc $e \geqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. $x = -\dfrac{1}{n+1}$: $e^{-\frac{1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1} > 0$; en passant aux inverses (positifs) : $e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$, puis à la puissance $n+1$: $e \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. (0,5 pt + 1 pt) (0,833333)

c) $\left(\dfrac{6}{5}\right)^5 = \dfrac{7\,776}{3\,125} = 2{,}488\,32 > 2{,}48$ et $\left(\dfrac{6}{5}\right)^6 = \dfrac{46\,656}{15\,625} < 3$ car $3 \times 15\,625 = 46\,875 > 46\,656$. Donc $2{,}48 (0,833333)

d) Hexagone circonscrit : avec I le point de contact d'un côté et P un sommet voisin, OIP est rectangle en I, $OI = 1$ (rayon) et $\widehat{IOP} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$. Dans ce triangle rectangle, $\dfrac{IP}{OI} = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$, donc $IP = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Côté $2IP = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, périmètre $6 \times \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$: $2\pi < 4\sqrt{3}$, soit $\pi < 2\sqrt{3}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (0,833333)

e) $e < 3 < \pi$ d'après c) et l'énoncé de d). exp étant strictement croissante, $\pi > 3$ donne $e^\pi > e^3 \approx 20{,}09 > 20$. (0,5 pt) (0,833333)

f) Chaque côté $[A_k A_{k+1}]$ est vu de O sous l'angle $\dfrac{2\pi}{n}$; avec I milieu du côté, OIA_k est rectangle en I, $OA_k = 1$ et $\widehat{IOA_k} = \dfrac{\pi}{n}$, donc $IA_k = \sin\dfrac{\pi}{n}$. Côté $2\sin\dfrac{\pi}{n}$, périmètre $2n\sin\dfrac{\pi}{n} < 2\pi$, d'où $n\sin\dfrac{\pi}{n} < \pi$ (pour $n = 6$: $12\sin\dfrac{\pi}{6} = 6$, cohérent). (0,5 pt) (0,833333)

Piège — Élever une inégalité à une puissance ou passer aux inverses n'est permis qu'entre nombres strictement positifs : on vérifie ce signe avant chaque étape.

Exercice 4 – Problème — La spirale du nautile *(5 pts)*

a) Pour tout θ : $r(\theta+\pi) = e\,r(\theta) \iff e^{k\theta}e^{k\pi} = e\times e^{k\theta} \iff e^{k\pi} = e^1 \iff k\pi = 1 \iff k = \dfrac{1}{\pi}$. Donc $r(\theta) = e^{\theta/\pi}$. (1 pt) (0,833333)

b) $r\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}}$: $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\left(\dfrac{e^{1/3}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{3}\,e^{1/3}}{2}\right)$. $r\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}$, $\cos\dfrac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\dfrac{3\pi}{2} = -1$: $M\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\left(0\,;-e^{3/2}\right)$. (0,5 pt + 0,5 pt) (0,833333)

c) $r(\theta) = e^{a\theta}$ avec $a = \dfrac{1}{\pi}$: $r'(\theta) = \dfrac{1}{\pi}e^{\theta/\pi} > 0$, donc r est strictement croissante. (0,5 pt) (0,833333)

d) $M(\theta)$ est sur $y = x$ si et seulement si $r(\theta)\sin\theta = r(\theta)\cos\theta$, soit $\cos\theta = \sin\theta$ (car $r(\theta) > 0$) : points images $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{5\pi}{4}$ à un tour près. Sur $[0\,;4\pi]$: $\theta \in \left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{5\pi}{4}\,;\dfrac{9\pi}{4}\,;\dfrac{13\pi}{4}\right\}$. Dans le quart $x<0$, $y<0$: $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{13\pi}{4}$; r croissante, le plus proche est $M\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{5/4}\,;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{5/4}\right)$. (0,5 pt + 0,5 pt) (0,833333)

e) Sur l'axe des abscisses : $\sin\theta = 0$, soit $\theta = n\pi$ (n entier naturel), et $r(n\pi) = e^n$. Il faut $e^n > 100$: $e^4 \approx 54{,}6 < 100$ (et r croissante, donc aussi pour $n \leqslant 4$), $e^5 \approx 148{,}4 > 100$. Donc $\theta = 5\pi$; $\cos 5\pi = -1$, d'où $M(5\pi)\left(-e^5\,;0\right)$, à environ 1,48 m de O. (1 pt) (0,833333)

f) $\theta+\pi$ a pour point image le symétrique de celui de θ par rapport à O ($\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$, $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$) : $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ sont sur une même droite passant par O, de part et d'autre de O. Donc $M(\theta)M(\theta+\pi) = r(\theta) + r(\theta+\pi) = e^{\theta/\pi} + e\,e^{\theta/\pi} = (1+e)e^{\theta/\pi}$. (0,5 pt) (0,833333)

Erreur fréquente — La droite $y = x$ coupe le cercle en deux points, images de $\dfrac{\pi}{4}$ et de $\dfrac{5\pi}{4}$: ne retenir que $\dfrac{\pi}{4}$ fait perdre la moitié des solutions.

Exercice 5 – Un minimum à trouver *(3 pts)*

a) $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et exp est croissante : $e^{-1} \leqslant e^{\cos t} \leqslant e^1$. (0,5 pt) (1)

b) Avec $X = e^{\cos t}$: $F(t) = X^2 - 2X = (X-1)^2 - 1 \geqslant -1$, avec égalité si et seulement si $X = 1$, soit $e^{\cos t} = e^0$, soit $\cos t = 0$. Minimum -1, atteint pour $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 pt + 0,5 pt) (1)

c) $(e-1) - \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = e + \dfrac{1}{e} - 2 = \left(\sqrt{e} - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 > 0$. Pour $X \in \left[\dfrac{1}{e}\,;e\right]$: $-(e-1) < -\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \leqslant X - 1 \leqslant e-1$, donc $(X-1)^2 \leqslant (e-1)^2$, avec égalité seulement pour $X = e$. Maximum $(e-1)^2 - 1 = e^2 - 2e$, atteint lorsque $e^{\cos t} = e$, soit $\cos t = 1$: $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (1 pt) (1)

Méthode — Une expression en e^{2u} et e^u se ramène au second degré en posant $X = e^u$; on n'oublie surtout pas l'intervalle où varie X.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).