Devoir surveillé – Fonction exponentielle et trigonométrie — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) Écrire $\dfrac{(e^{x})^{3}}{e^{x+2}}$ sous la forme e^{ax+b}.

b) Déterminer la mesure principale de $-\dfrac{35\pi}{6}$.

c) Calculer $\sin\dfrac{7\pi}{6}+\cos\dfrac{5\pi}{3}$.

d) Dériver la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=4e^{-0{,}5t}$.

e) Convertir 225° en radians, puis calculer la longueur de l'arc intercepté par cet angle au centre sur un cercle de rayon 12 cm (valeur exacte, puis approchée avec $\pi\approx 3{,}14$).

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

a) « Pour tout réel x, $e^{2x}=(e^{x})^{2}$. »

b) « Pour tout réel x, $e^{-x}\leqslant 1$. »

c) « $\cos\dfrac{11\pi}{6}=-\cos\dfrac{\pi}{6}$. »

d) « Pour tout réel x, $\sin(\pi-x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$. »

e) « Il existe un réel x tel que $\cos x=\dfrac{e}{2}$. »

f) « Pour tout réel x, $\cos^{2}x\leqslant e^{x^{2}}$. »

Exercice 3 – Étude d'une fonction *(5 pts)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^{2}-x-1\right)e^{-x}$.

a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=x(3-x)\,e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, avec les valeurs exactes des extremums locaux.

c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

d) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $f'(\cos t)=0$.

e) Montrer que, pour tout réel t, $f(\sin t)\geqslant -1$, puis déterminer les réels t de $[0\,;2\pi[$ pour lesquels l'égalité a lieu.

Exercice 4 – Problème — Un pendule qui s'amortit *(5 pts)*

Un pendule est formé d'une masse accrochée à un fil de longueur 90 cm. On modélise son amplitude angulaire (angle maximal entre le fil et la verticale, en radians) à l'instant t (en secondes) par $A(t) = \dfrac{\pi}{3}\,e^{-0{,}1t}$ pour $t \geqslant 0$.

a) Calculer $A'(t)$ et en déduire le sens de variation de A sur $[0\,;+\infty[$.

b) À l'instant $t = 0$, la masse est lâchée avec un fil faisant l'angle $A(0)$ avec la verticale. Calculer la longueur exacte de l'arc qu'elle parcourt jusqu'à la verticale, puis la hauteur dont elle est alors remontée par rapport à sa position la plus basse.

c) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $A(t+2) = e^{-0{,}2}A(t)$. Sachant que $e^{-0{,}2} \approx 0{,}82$, interpréter ce résultat en pourcentage.

d) On donne $e^{-0{,}6} \approx 0{,}549$ et $e^{-0{,}8} \approx 0{,}449$. Justifier que l'amplitude devient inférieure à $\dfrac{\pi}{6}$ à un instant compris entre 6 et 8 secondes.

e) Lorsque l'amplitude vaut exactement $\dfrac{\pi}{6}$, de quelle hauteur la masse remonte-t-elle au maximum ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de cm avec $\sqrt{3} \approx 1{,}732$.

Exercice 5 – Exponentielle et cercle *(3 pts)*

a) Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $e^{2\sin x} = e$.

b) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $e^{\cos x} \times e^{\cos x} = 1$.

c) Soit x un réel de $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ tel que $\sin x = \dfrac{2}{5}$. Calculer la valeur exacte de $\cos x$.

d) En déduire la valeur exacte de $B = \cos(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).