Corrigé et barème – Fonction exponentielle et trigonométrie — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Exercice 1 – Automatismes *(3 pts)*

a) $(e^x)^3 = e^{3x}$, donc $\dfrac{e^{3x}}{e^{x+2}} = e^{3x-x-2} = e^{2x-2}$. (0,5 pt) (0,6)

b) $-\dfrac{35\pi}{6} + 6\pi = \dfrac{-35\pi + 36\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ (on a ajouté trois tours), qui est dans $]-\pi\,;\pi]$: mesure principale $\dfrac{\pi}{6}$. (0,5 pt) (0,6)

c) $\sin\dfrac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\cos\dfrac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$: la somme vaut 0. (0,5 pt) (0,6)

d) La dérivée de $t \mapsto e^{at}$ est $t \mapsto ae^{at}$: $g'(t) = 4 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = -2e^{-0{,}5t}$. (0,5 pt) (0,6)

e) $225^\circ = \dfrac{225}{180}\pi = \dfrac{5\pi}{4}$ rad (on simplifie par 45) ; $\ell = 12 \times \dfrac{5\pi}{4} = 15\pi$ cm, soit environ $15 \times 3{,}14 = 47{,}1$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (0,6)

Méthode — Pour une mesure principale, on ajoute ou retire des multiples de 2π écrits avec le même dénominateur : $6\pi = \dfrac{36\pi}{6}$.

Exercice 2 – Qui a raison ? *(4 pts)*

a) Vrai : $(e^x)^2 = e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$. (0,5 pt) (0,666667)

b) Faux : pour $x = -1$, $e^{-x} = e^1 = e > 1$. Un contre-exemple suffit. (0,5 pt) (0,666667)

c) Faux : $\dfrac{11\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$, donc $\cos\dfrac{11\pi}{6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, alors que $-\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (0,5 pt) (0,666667)

d) Vrai : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, donc la somme vaut $\sin x - \sin x = 0$. (0,5 pt) (0,666667)

e) Faux : $e > 2$, donc $\dfrac{e}{2} > 1$, or un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. (1 pt) (0,666667)

f) Vrai : $\cos^2 x \leqslant 1$; et $x^2 \geqslant 0$ avec exp croissante donne $e^{x^2} \geqslant e^0 = 1$. Donc $\cos^2 x \leqslant 1 \leqslant e^{x^2}$. (1 pt) (0,666667)

Piège — Une affirmation « pour tout x » se réfute avec un seul contre-exemple, mais se démontre seulement par un raisonnement général : quelques essais ne prouvent rien.

Exercice 3 – Étude d'une fonction *(5 pts)*

a) Produit avec $u(x) = x^2 - x - 1$, $u'(x) = 2x - 1$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$ (dérivée de e^{at} avec $a = -1$) : $f'(x) = (2x-1)e^{-x} - \left(x^2 - x - 1\right)e^{-x} = \left(-x^2 + 3x\right)e^{-x} = x(3-x)e^{-x}$. (1 pt) (1)

b) $e^{-x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x(3-x)$, trinôme de racines 0 et 3, négatif à l'extérieur des racines. f décroît sur $]-\infty\,;0]$, croît sur $[0\,;3]$, décroît sur $[3\,;+\infty[$. $f(0) = -1$ (minimum local) et $f(3) = (9-3-1)e^{-3} = 5e^{-3}$ (maximum local). Tableau : $x : -\infty \mid 0 \mid 3 \mid +\infty$; signe de $f'(x) : - \mid 0 \mid + \mid 0 \mid -$; variations de f : décroissante jusqu'à -1, croissante jusqu'à $5e^{-3}$, puis décroissante. (0,5 pt signe + 0,5 pt tableau complet avec $f(0) = -1$ et $f(3) = 5e^{-3}$) (1)

c) $f(1) = -e^{-1}$ et $f'(1) = 1 \times 2 \times e^{-1} = 2e^{-1}$: $y = 2e^{-1}(x-1) - e^{-1}$, soit $y = \dfrac{2x-3}{e}$. (1 pt) (1)

d) $f'(\cos t) = \cos t\,(3 - \cos t)\,e^{-\cos t}$; l'exponentielle est non nulle et $3 - \cos t \geqslant 2 > 0$ car $\cos t \leqslant 1$. Donc $f'(\cos t) = 0 \iff \cos t = 0 \iff t = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $t = \dfrac{\pi}{2}$ dans $]-\pi\,;\pi]$. (1 pt) (1)

e) $X = \sin t$ appartient à $[-1\,;1]$. D'après b), f décroît sur $[-1\,;0]$ et croît sur $[0\,;1]$: sur $[-1\,;1]$ son minimum est $f(0) = -1$, atteint seulement en 0. Donc $f(\sin t) \geqslant -1$, avec égalité si et seulement si $\sin t = 0$, soit $t = 0$ ou $t = \pi$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — Pour étudier $f(\sin t)$ ou $f'(\cos t)$, on pose $X = \sin t$ ou $X = \cos t$ et on n'oublie pas que X reste dans $[-1\,;1]$: c'est souvent ce qui élimine une solution.

Exercice 4 – Problème — Un pendule qui s'amortit *(5 pts)*

a) $A'(t) = \dfrac{\pi}{3} \times (-0{,}1)e^{-0{,}1t} = -\dfrac{\pi}{30}e^{-0{,}1t} < 0$: A est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, l'amplitude diminue. (1 pt) (1)

b) $A(0) = \dfrac{\pi}{3}$. Arc : $\ell = 90 \times \dfrac{\pi}{3} = 30\pi$ cm ($\approx 94{,}2$ cm). Hauteur : en notant O le point d'attache, la masse est à $90\cos\dfrac{\pi}{3} = 45$ cm sous O (triangle rectangle), contre 90 cm en position basse : elle est remontée de $90 - 45 = 45$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

c) $A(t+2) = \dfrac{\pi}{3}e^{-0{,}1t-0{,}2} = \dfrac{\pi}{3}e^{-0{,}1t} \times e^{-0{,}2} = e^{-0{,}2}A(t)$. Toutes les 2 secondes, l'amplitude est multipliée par environ 0,82 : elle baisse d'environ 18 %, comme pour une évolution à taux constant. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $A(t) < \dfrac{\pi}{6} \iff e^{-0{,}1t} < \dfrac{1}{2} = 0{,}5$. $A(6) = \dfrac{\pi}{3}e^{-0{,}6} \approx \dfrac{\pi}{3} \times 0{,}549 > \dfrac{\pi}{6}$ et $A(8) \approx \dfrac{\pi}{3} \times 0{,}449 < \dfrac{\pi}{6}$. A étant décroissante, l'amplitude passe sous $\dfrac{\pi}{6}$ entre 6 et 8 s, et y reste. (1 pt) (1)

e) $h = 90 - 90\cos\dfrac{\pi}{6} = 90 - 90 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 90 - 45\sqrt{3}$ cm $\approx 90 - 77{,}94 = 12{,}06$, soit environ 12,1 cm. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — La hauteur de remontée n'est pas $90\cos\theta$ mais $90 - 90\cos\theta$: on mesure à partir de la position la plus basse, pas depuis le point d'attache.

Exercice 5 – Exponentielle et cercle *(3 pts)*

a) $e^{2\sin x} = e^1 \iff 2\sin x = 1 \iff \sin x = \dfrac{1}{2}$. Sur le cercle, deux points ont pour ordonnée $\dfrac{1}{2}$: $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$. (1 pt) (0,75)

b) $e^{\cos x} \times e^{\cos x} = e^{2\cos x}$ et $1 = e^0$: $2\cos x = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$. (0,5 pt) (0,75)

c) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{4}{25} = \dfrac{21}{25}$; sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, $\cos x < 0$, donc $\cos x = -\sqrt{\dfrac{21}{25}} = -\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. (1 pt) (0,75)

d) $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$: $B = -\cos x + 2\sin x = \dfrac{\sqrt{21}}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{\sqrt{21}+4}{5}$. (0,5 pt) (0,75)

Astuce — Sur le cercle, chaque valeur de sinus (hors ± 1) correspond à deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : x et $\pi - x$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).