Corrigé et barème – Fonction exponentielle et trigonométrie — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1re

Exercice 1 – Automatismes *(5 pts)*

a) $e^{3} \times e^{-7} = e^{3-7} = e^{-4}$, puis $\dfrac{e^{-4}}{e^{-2}} = e^{-4-(-2)} = e^{-2}$. (1 pt) (1)

b) $e^{2x} \times e^{1-x} = e^{2x+1-x} = e^{x+1}$. (1 pt) (1)

c) $180°$ correspondent à π rad, donc $195°$ correspondent à $\dfrac{195}{180}\pi = \dfrac{13\pi}{12}$ rad (on simplifie par 15). (1 pt) (1)

d) $\dfrac{\pi}{12}$ rad correspond à $\dfrac{180}{12} = 15°$, donc $\dfrac{7\pi}{12}$ rad correspond à $7 \times 15 = 105°$. (1 pt) (1)

e) $\dfrac{3\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4}$, donc $\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Les images de x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses : $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

Méthode — Pour convertir sans calculatrice, on passe par l'unité $\dfrac{\pi}{12}$ rad $= 15°$: la plupart des angles du cours en sont des multiples.

Exercice 2 – Équations et inéquations *(5 pts)*

a) $e^{a} = e^{b} \iff a = b$: $3x + 1 = x - 5 \iff 2x = -6 \iff x = -3$. $\mathcal{S} = \{-3\}$. (1 pt) (0,833333)

b) $x^{2} - 3 = 2x \iff x^{2} - 2x - 3 = 0$; $\Delta = 4 + 12 = 16$, d'où $x = \dfrac{2-4}{2} = -1$ ou $x = \dfrac{2+4}{2} = 3$. $\mathcal{S} = \{-1\,;3\}$. (1 pt) (0,833333)

c) $1 = e^{0}$ et exp est strictement croissante : $e^{2-5x} > e^{0} \iff 2 - 5x > 0 \iff x < \dfrac{2}{5}$. $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{2}{5}\right[$. (1 pt) (0,833333)

d) $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, donc l'équation s'écrit $e^{4x} = e^{\frac{1}{2}} \iff 4x = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{1}{8}$. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{8}\right\}$. (0,5 pt) (0,833333)

e) $3e^{-x} + 7 = 4 \iff 3e^{-x} = -3 \iff e^{-x} = -1$; or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x : $\mathcal{S} = \varnothing$. (0,5 pt) (0,833333)

f) $e^{-x} > 0$ pour tout x, donc $(x-3)e^{-x}$ a le signe de $x - 3$: négatif sur $]-\infty\,;3[$, nul en 3, positif sur $]3\,;+\infty[$. (1 pt) (0,833333)

Piège — Avant de résoudre, on isole l'exponentielle et on regarde le signe : une égalité du type $e^{-x} = -1$ n'a aucune solution, inutile de chercher plus loin.

Exercice 3 – Cercle trigonométrique et angles associés *(5 pts)*

a) $-\dfrac{13\pi}{4}+4\pi=-\dfrac{13\pi}{4}+\dfrac{16\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$; on a ajouté deux tours et $\dfrac{3\pi}{4}\in]-\pi\,;\pi]$: la mesure principale est $\dfrac{3\pi}{4}$. (1 pt) (1)

b) $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$: le point a pour coordonnées $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$. (1 pt) (1)

c) La longueur d'arc vaut rayon $\times$ angle en radians : $\ell=6\times\dfrac{\pi}{3}=2\pi$ cm, soit environ $2\times 3{,}14=6{,}28$ cm. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

d) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donne $\sin^2 x=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$, donc $\sin x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\sin x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (car $\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{\sqrt{8}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$). Comme $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$, $\sin x\leqslant 0$: $\sin x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (1 pt) (1)

e) $\cos(-x)=\cos x=\dfrac{1}{3}$; $\sin(\pi-x)=\sin x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. (1 pt : 0,5 pour deux résultats justes) (1)

Erreur fréquente — Avec $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, on obtient deux valeurs possibles pour $\sin x$: c'est l'intervalle de x qui fixe le signe, à ne jamais oublier.

Exercice 4 – Une fonction et sa tangente *(5 pts)*

a) Dérivée d'un produit uv avec $u(x)=3x-4$, $u'(x)=3$, $v(x)=e^x$, $v'(x)=e^x$: $f'(x)=3e^x+(3x-4)e^x=(3x-1)e^x$. (1 pt) (1)

b) $e^x>0$, donc $f'(x)$ a le signe de $3x-1$: négatif sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right[$, nul en $\dfrac{1}{3}$, positif sur $\left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$. f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$. Tableau : x : $-\infty\mid\dfrac{1}{3}\mid+\infty$; signe de $f'(x)$: $-\mid 0\mid+$; variations de f : décroissante, puis $-3e^{\frac{1}{3}}$, puis croissante. Minimum : $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=(1-4)e^{\frac{1}{3}}=-3e^{\frac{1}{3}}$. (0,5 pt signe + 0,5 pt tableau + 0,5 pt minimum) (1)

c) $f(0)=(0-4)e^0=-4$ et $f'(0)=(0-1)e^0=-1$: $T:\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$, soit $y=-x-4$. (1 pt) (1)

d) $y=0\iff x=-4$: $A(-4\,;0)$; $x=0$ donne $y=-4$: $B(0\,;-4)$. Le triangle OAB est rectangle en O avec $OA=OB=4$: il est isocèle, ses angles aigus valent $45°$, donc $\widehat{OAB}=\dfrac{\pi}{4}$ rad. (0,5 pt + 0,5 pt) (1)

e) Longueur d'arc = rayon $\times$ angle en radians $=4\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$. (0,5 pt) (1)

Astuce — Un triangle rectangle isocèle donne immédiatement un angle de $\dfrac{\pi}{4}$: repérer $OA=OB$ évite tout calcul de trigonométrie.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).