

Devoir surveillé – Dérivation : nombre dérivé, calcul de dérivées et variations — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Démontrer, à l'aide de la définition, que la fonction inverse est dérivable en tout réel $a \neq 0$ et que son nombre dérivé en a vaut $-\frac{1}{a^2}$.
- b) Démontrer, à l'aide de la définition, que la fonction racine carrée est dérivable en tout réel $a > 0$, de nombre dérivé $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.
- c) Soit f une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f' est paire.
- d) Application : soit $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est impaire, calculer $f'(x)$ sous forme factorisée, vérifier que f' est paire et en déduire le sens de variation de f .

Exercice 2 – Tangentes communes à deux paraboles

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 4$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .
- b) Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse b a pour équation $y = (4 - 2b)x + b^2 - 4$.
- c) Déterminer toutes les droites qui sont tangentes à la fois à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$, en précisant les points de contact.
- d) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes et que $\mathcal{C}_g$ est au-dessous de chacune des siennes. Que peut-on en déduire pour les tangentes communes ?

Exercice 3 – Une fonction avec une racine carrée

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement.
- b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}}$.
- c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$ (sans limite) et donner la valeur exacte de son minimum.
- d) En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $(1 - x)\sqrt{x} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, et préciser le cas d'égalité.
- e) Déterminer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 et en déduire une valeur approchée de $f(1,03)$.

Exercice 4 – Problème — Le plus grand rectangle dans un demi-disque (5 pts)

- a) On inscrit un rectangle dans un demi-disque de centre O et de rayon 5 cm : un côté du rectangle est porté par le diamètre, symétrique par rapport à O , et les deux autres sommets sont sur le demi-cercle. On note x la moitié de la largeur du rectangle, avec $x \in [0; 5]$. Montrer que l'aire du rectangle est $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$.
- b) Justifier que A et la fonction $g = A^2$ atteignent leur maximum sur $[0; 5]$ pour la même valeur de x .
- c) Déterminer les dimensions exactes du rectangle d'aire maximale et cette aire maximale.
- d) Quelle proportion de l'aire du demi-disque ce rectangle occupe-t-il ? Donner la valeur exacte, puis un pourcentage arrondi à l'unité.

Exercice 5 – Pour aller plus loin (3 pts)

- a) Pour $x \geq 0$, on pose $f_3(x) = x^3 - 3x + 2$. Étudier les variations de f_3 sur $[0; +\infty[$ et en déduire que $x^3 + 2 \geq 3x$ pour tout $x \geq 0$.
- b) Généralisation : soit n un entier, $n \geq 2$. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 0$, $x^n \geq nx - (n - 1)$, et préciser le cas d'égalité.
- c) Interpréter graphiquement ce résultat à l'aide d'une tangente.
- d) Application : sans calculer la puissance, montrer que $1,01^{50} \geq 1,5$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).