

Corrigé et barème – Dérivation : nombre dérivé, calcul de dérivées et variations — niveau ★★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Démontrer

(4 pts)

- a) Pour $h \neq 0$ avec $a + h \neq 0$: $\frac{1}{h} \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right) = \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$ (0,5 pt). Quand h tend vers 0, $a(a+h)$ tend vers $a^2 \neq 0$: le quotient tend vers $-\frac{1}{a^2}$. (0,5 pt) (1)
- b) Pour $h \neq 0$ avec $a + h \geq 0$, en multipliant par la quantité conjuguée : $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(a+h) - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$ (0,5 pt). Quand h tend vers 0, le dénominateur tend vers $2\sqrt{a} \neq 0$: le quotient tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$. (0,5 pt) (1)
- c) Pour tout x , $f(-x) = -f(x)$. La fonction $x \mapsto f(-x)$ est de la forme $f(ax+b)$ avec $a = -1$: sa dérivée est $x \mapsto -f'(-x)$ (0,5 pt). En dérivant l'égalité : $-f'(-x) = -f'(x)$, donc $f'(-x) = f'(x)$ pour tout x : f' est paire. (0,5 pt) (1)
- d) $x^2 + 1 \geq 1$: f est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique, et $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2+1} = -f(x)$; $f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ (0,5 pt). Seules des puissances paires de x apparaissent, donc $f'(-x) = f'(x)$; de plus $f'(x) \geq 0$, nul seulement en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (0,5 pt) (1)

Méthode — Pour lever l'indétermination d'un taux de variation avec des racines, on multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée.

Exercice 2 – Tangentes communes à deux paraboles

(4 pts)

- a) $f'(a) = 2a$: $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$. (0,5 pt) (1)
- b) $g'(x) = -2x + 4$, $g'(b) = 4 - 2b$, $g(b) = -b^2 + 4b - 4$. $y = (4 - 2b)(x - b) - b^2 + 4b - 4 = (4 - 2b)x - 4b + 2b^2 - b^2 + 4b - 4 = (4 - 2b)x + b^2 - 4$. (1 pt) (1)
- c) Une droite est tangente aux deux courbes s'il existe a et b tels que $2a = 4 - 2b$ et $-a^2 = b^2 - 4$ (0,5 pt). La première donne $a = 2 - b$; alors $-(4 - 4b + b^2) = b^2 - 4 \iff 4b - 2b^2 = 0 \iff b(2 - b) = 0$ (0,5 pt). Si $b = 0$: $a = 2$, droite $y = 4x - 4$, contacts (2 ; 4) et (0 ; -4). Si $b = 2$: $a = 0$, droite $y = 0$, contacts (0 ; 0) et (2 ; 0). (0,5 pt) (1)
- d) $x^2 - (2ax - a^2) = (x - a)^2 \geq 0$ et $g(x) - [(4 - 2b)x + b^2 - 4] = -x^2 + 2bx - b^2 = -(x - b)^2 \leq 0$ (0,5 pt). Chaque tangente commune laisse donc $\mathcal{C}_f$ au-dessus et $\mathcal{C}_g$ au-dessous : elle sépare les deux courbes. (0,5 pt) (1)

Astuce — Deux droites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont confondues si et seulement si $m = m'$ et $p = p'$: on obtient ainsi un système en a et b .

Exercice 3 – Une fonction avec une racine carrée

(4 pts)

- a) Pour $h > 0$: $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{(h-1)\sqrt{h}}{h} = \frac{h-1}{\sqrt{h}}$. Quand h tend vers 0, $h-1$ tend vers -1 et $\sqrt{h}$ vers 0 par valeurs positives : le quotient devient négatif et arbitrairement grand en valeur absolue, sans limite finie (0,5 pt). f n'est pas dérivable en 0 ; la courbe admet en l'origine une tangente verticale. (0,5 pt) (0,8)
- b) Produit : $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. (1 pt) (0,8)
- c) $2\sqrt{x} > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3x-1$, négatif sur $]0; \frac{1}{3}[$, positif sur $]\frac{1}{3}; +\infty[$. f décroît sur $[0; \frac{1}{3}]$ de $f(0) = 0$ à $f(\frac{1}{3})$, puis croît sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$ (0,5 pt). $f(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0,385$: c'est le minimum de f . (0,5 pt) (0,8)
- d) Pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, soit $(1-x)\sqrt{x} = -f(x) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$, avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{3}$. (0,5 pt) (0,8)
- e) $f(1) = 0$ et $f'(1) = \frac{2}{2} = 1$: $y = x - 1$. D'où $f(1,03) \approx 0,03$ (la calculatrice donne $0,03\sqrt{1,03} \approx 0,0304$). (0,5 pt) (0,8)

Piège — Une formule de dérivée valable sur $]0; +\infty[$ ne dit rien en 0 : la dérivabilité en une borne s'étudie avec le taux de variation.

Exercice 4 – Problème — Le plus grand rectangle dans un demi-disque (5 pts)

- a) Un sommet M situé sur le demi-cercle a pour projeté H sur le diamètre, avec $OH = x$ et $OM = 5$. Par Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H : $HM = \sqrt{25 - x^2}$ (hauteur du rectangle). Largeur $2x$, donc $A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2}$. (1 pt) (1,25)
- b) Pour tout $x \in [0; 5]$, $A(x) \geq 0$, et la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$: $A(x) \leq A(x_0) \iff A(x)^2 \leq A(x_0)^2$. Les deux fonctions ont donc leur maximum au même point. (1 pt) (1,25)
- c) $g(x) = 4x^2(25 - x^2) = 100x^2 - 4x^4$, $g'(x) = 200x - 16x^3 = 8x(25 - 2x^2)$ (0,5 pt). Sur $[0; 5]$, $8x \geq 0$ et $25 - 2x^2 > 0 \iff x < \frac{5\sqrt{2}}{2}$: g croît sur $\left[0; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{5\sqrt{2}}{2}; 5\right]$ (0,5 pt).
 $g\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 100 \times \frac{25}{2} - 4 \times \frac{625}{4} = 1250 - 625 = 625$, donc l'aire maximale vaut $\sqrt{625} = 25 \text{ cm}^2$ (0,5 pt). Dimensions : largeur $5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ cm}$, hauteur $\sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54 \text{ cm}$ (la largeur est le double de la hauteur). (0,5 pt) (1,25)
- d) Aire du demi-disque : $\frac{25\pi}{2} \text{ cm}^2$. Proportion : $\frac{25}{25\pi/2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637$, soit environ 64 %. (1 pt) (1,25)

Astuce — Quand la fonction à optimiser est positive et contient une racine, on optimise son carré : on obtient un polynôme, facile à dériver.

Exercice 5 – Pour aller plus loin**(3 pts)**

- a) $f'_3(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; sur $[0; +\infty[$, $x+1 > 0$: f_3 décroît sur $[0; 1]$ et croît sur $[1; +\infty[$ (0,5 pt). Son minimum est $f_3(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc $f_3(x) \geq 0$, soit $x^3 + 2 \geq 3x$ (d'ailleurs $f_3(x) = (x-1)^2(x+2)$). (0,5 pt) (0,75)
- b) Soit $f_n(x) = x^n - nx + n - 1$; $f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$. Comme $n-1 \geq 1$: si $0 \leq x < 1$, $x^{n-1} < 1$; si $x > 1$, $x^{n-1} > 1$. Donc f_n est strictement décroissante sur $[0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ (0,5 pt). Son minimum est $f_n(1) = 1 - n + n - 1 = 0$: $f_n(x) \geq 0$, soit $x^n \geq nx - (n-1)$, avec égalité seulement pour $x = 1$ (monotonie stricte). (0,5 pt) (0,75)
- c) Pour $u(x) = x^n$: $u(1) = 1$, $u'(1) = n$, tangente au point d'abscisse 1 : $y = n(x-1) + 1 = nx - (n-1)$. Sur $[0; +\infty[$, la courbe de u est au-dessus de cette tangente. (0,5 pt) (0,75)
- d) Avec $n = 50$ et $x = 1,01$: $1,01^{50} \geq 50 \times 1,01 - 49 = 50,5 - 49 = 1,5$. (0,5 pt) (0,75)

Méthode — Pour démontrer $A(x) \geq B(x)$, on étudie les variations de $A - B$ et on montre que son minimum est positif ou nul.