

Devoir surveillé – Dérivation : nombre dérivé, calcul de dérivées et variations — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) Dériver $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$ sur $]2; +\infty[$.
- b) Dériver $g(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ et simplifier.
- c) Déterminer l'intervalle sur lequel $h(x) = \sqrt{3x + 6}$ est dérivable, puis calculer $h'(x)$.
- d) Dériver $k(x) = \frac{4}{1 - 2x}$ sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

Exercice 2 – Vrai ou faux ?

(4 pts)

- a) « La fonction $f : x \mapsto |x - 1|$ est dérivable en 1. »
- b) « La fonction racine carrée est dérivable en 0. »
- c) « Si f est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $f'(0) = 0$. »
- d) « Si $f'(x) > 0$ pour tout x de $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, alors pour tous réels non nuls a

Exercice 3 – Tangentes à une courbe

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ sur $] -1; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \frac{3}{(x + 1)^2}$.
- b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
- c) Montrer que, pour tout $x > -1$, $f(x) - (3x - 1) = \frac{-3x^2}{x + 1}$. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T .
- d) Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{x}{3}$, et l'équation de cette tangente.
- e) À l'aide de T , donner une valeur approchée de $f(0,02)$, puis la comparer à la valeur donnée par la calculatrice.

Exercice 4 – Variations et inégalité

(4 pts)

- a) Soit $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ sur $[0; 3]$. Calculer $p'(x)$ et montrer que $p'(x) = 6(x - 1)(x - 2)$.
- b) Dresser le tableau de variations de p sur $[0; 3]$.
- c) Donner les extremums locaux de p , puis son maximum et son minimum sur $[0; 3]$.
- d) Vérifier que $p(x) = (x - 2)^2(2x - 1)$. En déduire que, pour tout réel $x \geq \frac{1}{2}$, $2x^3 + 12x \geq 9x^2 + 4$, et préciser les cas d'égalité.

Exercice 5 – Problème — Le coût moyen d'un atelier*(4 pts)*

- a) Un atelier fabrique entre 5 et 60 objets par jour. Le coût total de fabrication de x objets est $C(x) = x^2 + 10x + 400$, en euros. Calculer $C(10)$, puis le coût moyen par objet lorsqu'on en fabrique 10.
- b) Le coût moyen est $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$ pour $x \in [5; 60]$. Montrer que $C_M(x) = x + 10 + \frac{400}{x}$, puis que $C'_M(x) = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$.
- c) Étudier les variations de C_M sur $[5; 60]$.
- d) Quelle production minimise le coût moyen ? Donner ce coût moyen minimal et le coût total correspondant.
- e) On appelle coût marginal la dérivée $C'(x)$. Vérifier qu'au minimum du coût moyen, coût marginal et coût moyen sont égaux.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).