

Corrigé et barème – Dérivation : nombre dérivé, calcul de dérivées et variations — niveau ★★

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(4 pts)

- a) $u = x^2 + 1, u' = 2x, v = x - 2, v' = 1 : f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$. (1 pt) (1)
- b) $g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ (car $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$). (1 pt) (1)
- c) $h(x) = r(3x+6)$ avec $r(X) = \sqrt{X}$, dérivable sur $]0; +\infty[$; il faut $3x+6 > 0 \iff x > -2$: h est dérivable sur $] -2; +\infty[$ et $h'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x+6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$. (1 pt) (1)
- d) $k = \frac{4}{v}$ avec $v(x) = 1 - 2x, v'(x) = -2 : k'(x) = -\frac{4v'(x)}{v(x)^2} = \frac{8}{(1-2x)^2}$. (1 pt) (1)

Piège — La racine carrée est définie en 0 mais n'y est pas dérivable : pour $\sqrt{3x+6}$, on exclut $x = -2$ et l'intervalle de dérivabilité est ouvert.

Exercice 2 – Vrai ou faux ?

(4 pts)

- a) Faux. Pour $h \neq 0 : \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{|h|}{h}$, qui vaut 1 si $h > 0$ et -1 si $h < 0$; ce quotient n'a pas de limite quand h tend vers 0. (1 pt) (1)
- b) Faux. Pour $h > 0 : \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, qui devient arbitrairement grand quand h tend vers 0 : pas de limite finie (la courbe a une tangente verticale en 0). (1 pt) (1)
- c) Vrai. Pour tout $x, f(-x) = f(x)$. En dérivant $x \mapsto f(-x)$ (forme $f(ax+b)$ avec $a = -1, b = 0$) : $-f'(-x) = f'(x)$. En $x = 0 : -f'(0) = f'(0)$, donc $f'(0) = 0$. (1 pt) (1)
- d) Faux. Contre-exemple : $f(x) = -\frac{1}{x}$, avec $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$; pourtant $-1 < 1$ et $f(-1) = 1 > f(1) = -1$. Le lien signe de f' / variations ne vaut que sur un intervalle. (1 pt) (1)

Erreur fréquente — Dire « f est croissante sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ » est incorrect : on étudie les variations intervalle par intervalle.

Exercice 3 – Tangentes à une courbe

(4 pts)

- a) $f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$. (1 pt) (0,8)
- b) $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3 : T : y = 3x - 1$. (0,5 pt) (0,8)
- c) $(3x-1)(x+1) = 3x^2 + 2x - 1$, donc $f(x) - (3x-1) = \frac{2x-1 - (3x^2+2x-1)}{x+1} = \frac{-3x^2}{x+1}$ (0,5 pt). Sur $] -1; +\infty[$, $x+1 > 0$ et $-3x^2 \leq 0$: la différence est négative ou nulle, nulle seulement en 0. $\mathcal{C}_f$ est sous T et la touche en $A(0; -1)$. (0,5 pt) (0,8)
- d) $f'(x) = \frac{1}{3} \iff (x+1)^2 = 9 \iff x+1 = 3$ ou $x+1 = -3$; comme $x+1 > 0$, $x = 2$ (0,5 pt).
 $f(2) = \frac{3}{3} = 1$: point $(2; 1)$, tangente $y = \frac{1}{3}(x-2) + 1 = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. (0,5 pt) (0,8)
- e) $f(0,02) \approx 3 \times 0,02 - 1 = -0,94$. La calculatrice donne $f(0,02) = \frac{-0,96}{1,02} \approx -0,9412$: écart d'environ 0,001, et l'approximation est un peu trop grande, conformément à c). (0,5 pt) (0,8)

Méthode — Pour situer une courbe par rapport à une tangente, on étudie le signe de la différence $f(x) - (ax + b)$ mise au même dénominateur.

Exercice 4 – Variations et inégalité

(4 pts)

- a) $p'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$ et $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$, donc $p'(x) = 6(x-1)(x-2)$. (1 pt) (1)
- b) $p' > 0$ sur $[0; 1[$ et $]2; 3]$, $p' < 0$ sur $]1; 2[$. $p(0) = -4$, $p(1) = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$, $p(2) = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$, $p(3) = 54 - 81 + 36 - 4 = 5$. p croît de -4 à 1 sur $[0; 1]$, décroît de 1 à 0 sur $[1; 2]$, croît de 0 à 5 sur $[2; 3]$. (1 pt) (1)
- c) Maximum local 1 en $x = 1$, minimum local 0 en $x = 2$; sur $[0; 3]$, maximum 5 (en 3) et minimum -4 (en 0). (0,5 pt) (1)
- d) $(x^2 - 4x + 4)(2x - 1) = 2x^3 - x^2 - 8x^2 + 4x + 8x - 4 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = p(x)$ (0,5 pt). Si $x \geq \frac{1}{2} : (x-2)^2 \geq 0$ et $2x-1 \geq 0$, donc $p(x) \geq 0$, c'est-à-dire $2x^3 + 12x \geq 9x^2 + 4$ (0,5 pt).
 Égalité si et seulement si $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$. (0,5 pt) (1)

Astuce — Un facteur au carré comme $(x-2)^2$ trahit un minimum local où la courbe est tangente à l'axe des abscisses : ici $p(2) = 0$ et $p'(2) = 0$.

Exercice 5 – Problème — Le coût moyen d'un atelier

(4 pts)

- a) $C(10) = 100 + 100 + 400 = 600$ € ; coût moyen $\frac{600}{10} = 60$ € par objet. (0,5 pt) (0,8)
- b) $C_M(x) = \frac{x^2 + 10x + 400}{x} = x + 10 + \frac{400}{x}$ (0,5 pt). $C'_M(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$. (1 pt) (0,8)
- c) Sur $[5; 60]$, $x^2 > 0$ et $x+20 > 0$: $C'_M(x)$ a le signe de $x-20$. C_M décroît sur $[5; 20]$ de $C_M(5) = 5 + 10 + 80 = 95$ à $C_M(20) = 20 + 10 + 20 = 50$, puis croît sur $[20; 60]$ jusqu'à $C_M(60) = 70 + \frac{20}{3} = \frac{230}{3} \approx 76,67$. (1 pt) (0,8)
- d) Il faut fabriquer 20 objets : coût moyen minimal 50 € par objet, coût total $C(20) = 400 + 200 + 400 = 1\,000$ € ($= 20 \times 50$). (0,5 pt) (0,8)
- e) $C''(x) = 2x + 10$, donc $C''(20) = 50 = C_M(20)$. (0,5 pt) (0,8)

Erreur fréquente — Minimiser le coût moyen ne revient pas à minimiser le coût total : C est croissante sur $[5; 60]$, son minimum est en 5, pas en 20.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).