

Corrigé et barème – Dérivation : nombre dérivé, calcul de dérivées et variations — niveau ★

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Automatismes

(5 pts)

- a) $f'(x) = 2 \times 4x^3 - 3 \times 2x + 5 = 8x^3 - 6x + 5$. (1 pt) (1)
- b) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $g'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$. (1 pt) (1)
- c) Produit uv avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = x^2 - 3$, $v'(x) = 2x$: $h'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$. (1 pt) (1)
- d) $k(x) = f(5x - 2)$ avec $f(X) = X^3$, $f'(X) = 3X^2$; donc $k'(x) = 5 \times 3(5x - 2)^2 = 15(5x - 2)^2$. (1 pt) (1)
- e) $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et $p(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = p(x)$: p est paire (0,5 pt). $p'(x) = 4x^3 - 6x$ et $p'(-x) = -4x^3 + 6x = -p'(x)$: p' est impaire (0,5 pt). (1)

Méthode — Pour $x \mapsto f(ax + b)$, on dérive la fonction « extérieure » puis on multiplie par a : le facteur 5 de la question d) est le plus souvent oublié.

Exercice 2 – Du taux de variation à la tangente

(5 pts)

- a) $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$ et $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, donc $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0}{2} = 0$. (1 pt) (1,25)
- b) $f(3 + h) = 9 + 6h + h^2 - 12 - 4h + 1 = h^2 + 2h - 2$ et $f(3) = -2$, donc $f(3 + h) - f(3) = h^2 + 2h$ et, pour $h \neq 0$, $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = h + 2$ (1 pt). Quand h tend vers 0, ce quotient tend vers 2 : f est dérivable en 3 et $f'(3) = 2$. (0,5 pt) (1,25)
- c) $y = f'(3)(x - 3) + f(3) = 2(x - 3) - 2$, soit $y = 2x - 8$. (1 pt) (1,25)
- d) $f'(x) = 2x - 4$ (on retrouve bien $f'(3) = 2$) (0,5 pt). $f'(x) = 0 \iff x = 2$ et $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$: la tangente est horizontale au point $(2; -3)$, d'équation $y = -3$ (0,5 pt). La sécante passant par $(1; -2)$ et $(3; -2)$ a pour coefficient directeur le taux de a), c'est-à-dire 0 : elle est horizontale, donc parallèle à cette tangente. (0,5 pt) (1,25)

Piège — Le taux de variation donne la pente d'une sécante, pas un nombre dérivé : ici il vaut 0 entre 1 et 3, alors que $f'(1) = -2$ et $f'(3) = 2$.

Exercice 3 – Étude d’une fonction polynôme*(6 pts)*

- a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$. (1 pt) (1,2)
- b) Trinôme de racines -2 et 2 , de coefficient $3 > 0$: $f'(x) > 0$ sur $[-3; -2[$ et sur $]2; 4]$, $f'(x) < 0$ sur $] - 2; 2[$, $f'(\pm 2) = 0$. (1 pt) (1,2)
- c) $f(-3) = -27 + 36 + 3 = 12$, $f(-2) = -8 + 24 + 3 = 19$, $f(2) = 8 - 24 + 3 = -13$, $f(4) = 64 - 48 + 3 = 19$ (0,5 pt). f est croissante sur $[-3; -2]$ (de 12 à 19), décroissante sur $[-2; 2]$ (de 19 à -13), croissante sur $[2; 4]$ (de -13 à 19). (1 pt) (1,2)
- d) Maximum local 19 en $x = -2$ (f' s’annule en changeant de signe, de $+$ à $-$), minimum local -13 en $x = 2$ (de $-$ à $+$) (1 pt). Sur $[-3; 4]$: maximum 19, atteint en -2 et en 4 ; minimum -13 , atteint en 2 . (0,5 pt) (1,2)
- e) $f(0) = 3$ et $f'(0) = -12$, donc $y = -12x + 3$. (1 pt) (1,2)

Erreur fréquente — Oublier les bornes de l’intervalle : ici $f(4) = 19$ égale le maximum local, et sur un autre intervalle une borne peut même le dépasser.

Exercice 4 – Problème — L’enclos le long de la rivière*(4 pts)*

- a) Le côté parallèle à la rivière mesure $60 - 2x$; il faut $x > 0$ et $60 - 2x > 0$, soit $x \in]0; 30[$. L’aire vaut $x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$. (1 pt) (1)
- b) $A'(x) = 60 - 4x$; $A'(x) > 0 \iff x < 15$: $A'(x) > 0$ sur $]0; 15[$, $A'(15) = 0$, $A'(x) < 0$ sur $]15; 30[$. (1 pt) (1)
- c) A est croissante sur $]0; 15]$ et décroissante sur $[15; 30[$: maximum en $x = 15$, avec $A(15) = 900 - 450 = 450$ (1 pt). L’enclos optimal mesure 15 m sur $60 - 30 = 30$ m, pour une aire de 450 m². (0,5 pt) (1)
- d) Non : pour tout $x \in]0; 30[$, $A(x) \leq 450 < 460$. (0,5 pt) (1)

Astuce — Avant de dériver, on fixe l’intervalle d’étude grâce aux contraintes concrètes (longueurs positives) : il sert ensuite à lire le tableau.