Variations, extremums et courbes

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Analyse · Dérivation)

La démarche pour étudier une fonction

1. Je précise l'intervalle d'étude et je justifie que f y est dérivable (polynôme, quotient dont le dénominateur ne s'annule pas…).

2. Je calcule $f'(x)$ et je le factorise : facteur commun, identité remarquable, racines d'un trinôme, même dénominateur.

3. J'étudie le signe de $f'(x)$ dans un tableau de signes (un carré ou un dénominateur au carré est positif).

4. Je conclus en citant le théorème « signe de la dérivée et variations », puis je complète le tableau de variations avec les images.

Le réflexe — un tableau de variations sans la phrase « d'après le théorème liant le signe de la dérivée et les variations » ni les images aux points remarquables ne rapporte pas tous les points.

Cas 1 · Dresser un tableau de variations

Réflexe — dériver, factoriser, signe de f′(x), flèches, puis images aux points où f′ s'annule.

Exemple. Questions types : « Étudier les variations de g », « Dresser le tableau de variations ». Exemple : $g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ sur $\mathbb{R}$.

g est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$.

Ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines -2 et 1, négatif entre elles. D'après le théorème, g est croissante sur $]-\infty\,;-2]$, décroissante sur $[-2\,;1]$, croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Images : $g(-2) = -16 + 12 + 24 = 20$ et $g(1) = 2 + 3 - 12 = -7$.

Attention — sur une réunion d'intervalles comme $\mathbb{R}$ privé de 0, le théorème ne s'applique que sur chaque intervalle séparément.

Cas 2 · Justifier un extremum

Réflexe — f′(a) = 0 ET changement de signe de f′ en a ; + puis − : maximum ; − puis + : minimum.

Exemple. Questions types : « Montrer que h admet un minimum », « Préciser la nature de l'extremum ». Exemple : $h(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

$h'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $x+2>0$ et $x^2>0$: $h'(x)$ a le signe de $x-2$, négatif puis positif.

h' s'annule en 2 en passant de − à + : $h(2) = 2 + 2 = 4$ est le minimum de h sur $]0\,;+\infty[$.

Attention — f′(a) = 0 sans changement de signe ne donne pas d'extremum (x³ en 0) ; sur un segment, comparer aussi les bornes.

Cas 3 · Résoudre un problème d'optimisation

Réflexe — variable et intervalle, grandeur en fonction de x seul, variations, phrase-réponse avec unités.

Exemple. Questions types : « Quelles dimensions donnent l'aire maximale ? », « Pour quelle production le coût est-il minimal ? ». Exemple : pour x centaines d'objets ($x \in [0\,;6]$), le bénéfice est $B(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$ milliers d'euros.

$B'(x) = -3x^2 + 12x = 3x(4-x)$: positif sur $[0\,;4]$, négatif sur $[4\,;6]$.
B est croissante puis décroissante : maximum $B(4) = -64 + 96 - 5 = 27$.
Le bénéfice est maximal, 27 000 €, pour 400 objets.

Attention — une racine de la dérivée hors de l'intervalle concret ne compte pas ; répondre à la question posée (dimension ou valeur).

Cas 4 · Inégalité et position de deux courbes

Réflexe — d(x) = f(x) − g(x) ; variations de d ; minimum $\geq 0 \Longrightarrow$ f(x) $\geq$ g(x) et $\mathcal{C}$f au-dessus de $\mathcal{C}$g.

Exemple. Questions types : « Montrer que pour tout $x \geqslant 0\ldots$ », « Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ». Exemple : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x^2 - 4$ sur $[0\,;+\infty[$.

$d(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et $d'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
Sur $[0\,;+\infty[$: d est décroissante sur $[0\,;2]$, croissante sur $[2\,;+\infty[$; son minimum est $d(2) = 8 - 12 + 4 = 0$.
Donc $d(x) \geqslant 0$: $x^3 \geqslant 3x^2 - 4$, et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[0\,;+\infty[$, les deux courbes se touchant au point d'abscisse 2.

Attention — c'est le signe de d qui compte, pas celui de d′ ; diviser une inégalité par un nombre négatif change son sens.

Cas 5 · Étudier la parité

Réflexe — ensemble symétrique ? calculer f(−x) avec parenthèses, comparer à f(x) et à −f(x).

Exemple. Questions types : « Montrer que f est impaire », « Que peut-on dire de sa courbe ? ». Exemple : $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et $x^2 + 1 > 0$.
$f(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-2x^3}{x^2+1} = -f(x)$: f est impaire.
Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère et $f(0) = 0$.

Attention — si l'ensemble de définition n'est pas symétrique, la fonction n'est ni paire ni impaire, sans calcul.

Cas 6 · Appliquer la méthode de Newton

Réflexe — x_0 choisi avec le tableau de variations ; f(x_n) et f′(x_n) séparément ; $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$.

Exemple. Questions types : « Calculer x_1 et x_2 », « Expliquer ce que calcule le programme ». Exemple : approcher $\sqrt{3}$ avec $f(x) = x^2 - 3$ et $x_0 = 2$.

$f'(x) = 2x$. $f(2) = 1$ et $f'(2) = 4$: $x_1 = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$.
$f\left(\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{1}{16}$ et $f'\left(\dfrac{7}{4}\right) = \dfrac{7}{2}$: $x_2 = \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{56} = \dfrac{97}{56}$.
$\dfrac{97}{56} \approx 1{,}732\,14$, à comparer à $\sqrt{3} \approx 1{,}732\,05$.

Attention — si f′(x_n) = 0, la tangente est horizontale : la méthode s'arrête (division par zéro).

Les pièges

- « $f'(a) = 0$, donc extremum » : faux sans changement de signe de f'.
- Le maximum est une valeur $f(a)$; il est atteint en $x = a$: ne pas confondre les deux.
- Sur un segment, le maximum peut être atteint en une borne, où f' ne s'annule pas.
- Le théorème des variations ne vaut que sur un intervalle ($1/x$ n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ privé de 0).
- Calculer $f(-x)$ sans parenthèses : $-x^2$ n'est pas $(-x)^2$.
- Newton : jamais de x_0 où f' s'annule.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).