

Devoir surveillé – Dérivation et variations : extremums et optimisation

Signe de la dérivée et sens de variation, tableau de variations, extremums locaux, problèmes d'optimisation, étude complète de fonction, méthode de Newton (approche)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Étude d'un polynôme (4 pts)

- a) Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.
- b) Factoriser $f'(x)$ et étudier son signe.
- c) Dresser le tableau de variations de f (sans limites).
- d) Donner les extremums locaux de f et leur nature.

Exercice 2 – Une fonction bornée (4 pts)

- a) Soit $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g'(x) = \frac{4(2-x)(2+x)}{(x^2 + 4)^2}$.
- b) Dresser le tableau de variations de g (sans limites).
- c) Montrer que $-1 \leq g(x) \leq 1$ pour tout réel x .
- d) Un élève affirme : « le maximum de g sur $[-1; 1]$ vaut 1 ». Expliquer son erreur et donner ce maximum.

Exercice 3 – Démontrer une inégalité (4 pts)

- a) Soit $h(x) = x^4 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $h'(x)$ et vérifier que $h'(x) = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$.
- b) Étudier le signe de $h'(x)$.
- c) Dresser le tableau de variations de h et donner son minimum.
- d) En déduire que $x^4 + 3 \geq 4x$ pour tout réel x ; préciser le cas d'égalité.

Exercice 4 – Prix d'un billet de théâtre (4 pts)

- a) Un théâtre fixe le prix p d'un billet, en euros, avec $p \in [5; 30]$. Il vend alors $600 - 20p$ billets. Chaque spectateur coûte 3 € et les frais fixes sont de 1 000 €. Montrer que le bénéfice est $B(p) = -20p^2 + 660p - 2800$.
- b) Calculer $B'(p)$ et étudier les variations de B sur $[5; 30]$.
- c) Déterminer le prix qui maximise le bénéfice et ce bénéfice maximal.
- d) Combien de billets sont vendus à ce prix ?

Exercice 5 – Approcher la racine cubique de 10

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = x^3 - 10$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que l'équation $f(x) = 0$ a au plus une solution, située dans $[2; 3]$ si elle existe.
- b) Montrer que la méthode de Newton s'écrit $x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 10}{3x_n^2}$ (pour $x_n \neq 0$).
- c) Avec $x_0 = 2$, calculer x_1 sous forme de fraction.
- d) Calculer x_2 et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).