

Corrigé et barème – Dérivation et variations : extremums et optimisation

Signe de la dérivée et sens de variation, tableau de variations, extremums locaux, problèmes d'optimisation, étude complète de fonction, méthode de Newton (approche)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Étude d'un polynôme

(4 pts)

- a) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$. (1)
- b) $f'(x) = 3(x^2 + 2x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$: positif sur $] - \infty; -3[$ et $]1; +\infty[$, négatif sur $] - 3; 1[$. (1)
- c) f croissante sur $] - \infty; -3]$, décroissante sur $[-3; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$; $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$, $f(1) = 1 + 3 - 9 + 2 = -3$. (1)
- d) Maximum local $f(-3) = 29$ (f' passe de $+$ à $-$) ; minimum local $f(1) = -3$ (f' passe de $-$ à $+$). (1)

Erreur fréquente — Donner l'abscisse -3 au lieu de la valeur 29 : un extremum est une valeur de f , atteinte en une abscisse.

Exercice 2 – Une fonction bornée

(4 pts)

- a) $g'(x) = \frac{4(x^2+4)-4x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$. (1)
- b) Dénominateur > 0 : signe de $(2-x)(2+x)$. g décroissante sur $] - \infty; -2]$, croissante sur $[-2; 2]$, décroissante sur $[2; +\infty[$; $g(-2) = -1$, $g(2) = 1$. (1)
- c) $g(x) + 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2+4} \geq 0$ et $g(x) - 1 = \frac{-(x-2)^2}{x^2+4} \leq 0$, d'où $-1 \leq g(x) \leq 1$. (1)
- d) Le maximum 1 est atteint en 2, hors de $[-1; 1]$. Sur $[-1; 1] \subset [-2; 2]$, g est croissante : maximum $g(1) = \frac{4}{5} = 0,8$. (1)

Attention — Un extremum dépend de l'intervalle d'étude : sur un segment, on regarde d'abord où se trouvent les points où g' s'annule.

Exercice 3 – Démontrer une inégalité

(4 pts)

- a) $h'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$ et $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$. (1)
- b) $x^2 + x + 1 : \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, toujours positif. $h'(x)$ a le signe de $x - 1$: négatif sur $] - \infty; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$. (1)
- c) h décroissante sur $] - \infty; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$; minimum $h(1) = 1 - 4 + 3 = 0$. (1)
- d) $h(x) \geq 0$ pour tout x , donc $x^4 + 3 \geq 4x$; égalité si et seulement si $x = 1$ (seul point où h atteint 0). (1)

À retenir — Pour prouver $f \geq g$, on étudie $f - g$ et on montre que son minimum est positif ou nul.

Exercice 4 – Prix d'un billet de théâtre

(4 pts)

- a) Chaque billet rapporte $p - 3$ euros : $B(p) = (p - 3)(600 - 20p) - 1000 = 600p - 20p^2 - 1800 + 60p - 1000 = -20p^2 + 660p - 2800$. (1)
- b) $B'(p) = -40p + 660$, positif sur $]5; 16,5[$, négatif sur $]16,5; 30]$: B croissante puis décroissante. (1)
- c) Prix optimal 16,50 € ; $B(16,5) = -20 \times 272,25 + 10\,890 - 2800 = 2645$ €. (1)
- d) $600 - 20 \times 16,5 = 270$ billets. (1)

Le point clé — La modélisation (bénéfice par billet fois nombre de billets, moins les frais fixes) vaut la moitié de l'exercice : on la rédige avant de dériver.

Exercice 5 – Approcher la racine cubique de 10

(4 pts)

- a) $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, nulle seulement en 0 : f strictement croissante, donc au plus une solution. $f(2) = -2 < 0$ et $f(3) = 17 > 0$: elle ne peut être ni < 2 ni > 3 . (1)
- b) $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 10}{3x_n^2} = \frac{3x_n^3 - x_n^3 + 10}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 10}{3x_n^2}$. (1)
- c) $x_1 = \frac{16+10}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$. (1)
- d) $x_1^3 = \frac{2197}{216}$, $x_2 = \frac{2197/108 + 10}{169/12} = \frac{3277}{108} \times \frac{12}{169} = \frac{3277}{1521} \approx 2,1545$. (1)

Astuce — Simplifier la formule de Newton avant de calculer évite les erreurs d'arrondi et donne des fractions exactes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).