

Dérivation — nombre dérivé et tangente

Ce chapitre définit le nombre dérivé comme limite d'un taux de variation et l'interprète comme pente de la tangente : il faut savoir le calculer par la définition, le lire sur un graphique, écrire une équation de tangente et reconnaître une fonction non dérivable.

1 Définitions

- **Taux de variation** de f entre a et $a+h$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, pente de la sécante passant par les points d'abscisses a et $a+h$.
- **Nombre dérivé** : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si cette limite existe et est finie. On dit alors que f est **dérivable en a** .
- **Tangente en $A(a ; f(a))$** : droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$.

2 Formules

- Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Approximation affine pour h proche de 0 : $f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$.
- Nombres dérivés usuels : $k \rightarrow 0$; $mx+p \rightarrow m$; $x^2 \rightarrow 2a$; $x^3 \rightarrow 3a^2$; $\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{a^2}$ ($a \neq 0$) ; $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}$ ($a > 0$).

3 Méthodes

1. **Nombre dérivé par la définition** : calculer $f(a)$ et $f(a+h)$, développer, factoriser $f(a+h)-f(a)$ par h , simplifier, puis faire tendre h vers 0. Pour $\sqrt{x}$, multiplier par la quantité conjuguée ; pour $\frac{1}{x}$, réduire au même dénominateur.
2. **Équation de tangente** : $f(a)$, puis $f'(a)$, puis $y = f'(a)(x-a) + f(a)$; vérifier que $x=a$ redonne $f(a)$.
3. **Lecture graphique** : $f(a)$ = ordonnée du point de contact ; $f'(a)$ = pente de la tangente, calculée avec deux points de cette droite.
4. **Tangente de pente donnée m** : résoudre $f'(a) = m$; tangente passant par un point donné : écrire la tangente en a et imposer que le point vérifie l'équation.

4 Interprétations

- Physique : position $d(t) \rightarrow$ le taux de variation est la vitesse moyenne, $d'(t)$ la vitesse instantanée.
- Économie : coût $C(q) \rightarrow C'(q)$ est le coût marginal, proche du coût de l'unité supplémentaire.
- Signe : $f'(a) > 0$ tangente qui monte, $f'(a) < 0$ tangente qui descend, $f'(a) = 0$ tangente horizontale.

5 Pièges

- Ne pas laisser h dans $f'(a)$: le nombre dérivé est une limite, un nombre fixe.
- Taux de variation entre a et $b \neq a$: l'un est une pente moyenne, l'autre une pente en un point.
- $f'(a) = 0$ n'implique pas $f(a) = 0$.
- Écrire $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ en entier, pas seulement $y = f'(a)x$.
- $|x|$ n'est pas dérivable en 0 (taux ± 1 selon le signe de h) ; $\sqrt{x}$ non plus (taux $\frac{1}{2\sqrt{h}}$ infini, tangente verticale). Être définie en a ne suffit pas.

L'ESSENTIEL

- Le nombre dérivé $f'(a)$ est la limite du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0.
- Graphiquement, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a .
- Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

—Pour h petit, $f(a+h) \approx f(a) + h f'(a)$: la courbe se confond presque avec sa tangente.

— $x^2 \rightarrow 2a$, $x^3 \rightarrow 3a^2$, $\frac{1}{x} \rightarrow -\frac{1}{a^2}$, $\sqrt{x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}$; $|x|$ et $\sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0.