

Devoir surveillé – Dérivation — nombre dérivé et tangente

Taux de variation, limite et tangente à une courbe (programme de 1re Spécialité)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____

Date : _____

Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Taux de variation et nombre dérivé

(4 pts)

- Soit $f(x) = -x^2 + 6x - 2$. Calculer le taux de variation de f entre 0 et 5.
- Pour $h \neq 0$, exprimer $\frac{f(4+h) - f(4)}{h}$ sous forme simplifiée.
- En déduire que f est dérivable en 4 et donner $f'(4)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

Exercice 2 – Dérivées usuelles et tangentes

(4 pts)

- | | |
|--|--|
| a) Équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto x^3$ au point d'abscisse 5. | c) Équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \sqrt{x}$ au point d'abscisse 36. |
| b) Équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ au point d'abscisse -1 . | d) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{36,6}$. |

Exercice 3 – Calcul par la définition et tangente horizontale

(4 pts)

- Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Pour $h \neq 0$, montrer que $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 7 + 3h$.
- En déduire $f'(2)$.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
- Pour a réel quelconque, déterminer $f'(a)$ par la définition, puis les coordonnées du point de la courbe où la tangente est horizontale.

Exercice 4 – Dérivabilité et pièges

(4 pts)

- Soit $f(x) = |2x - 6|$. Étudier la dérivabilité de f en 3.
 - Vrai ou faux, en justifiant : « si $f'(a) = 0$, alors $f(a) = 0$ ».
 - Soit $g(x) = x^2$. Déterminer les tangentes à la courbe de g passant par le point $K(1; -3)$.
 - Un élève affirme : « pour $u(x) = x^3$, le taux de variation entre -1 et 2 vaut 3, donc $u'\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ ».
- Expliquer l'erreur et donner la valeur exacte de $u'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5 – Problème : hauteur d'une balle*(4 pts)*

- a) a) On lance une balle verticalement ; sa hauteur (en m) à l'instant t (en s) est $h(t) = -5t^2 + 12t + 1$. Calculer $h(1)$ et la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 1$.
- b) b) Pour $k \neq 0$, montrer que $h(1 + k) - h(1) = 2k - 5k^2$.
- c) c) En déduire la vitesse instantanée de la balle à $t = 1$ s.
- d) d) Déterminer, par la définition, la vitesse instantanée $v(t)$ à un instant t quelconque, puis l'instant où la balle atteint sa hauteur maximale et cette hauteur.

Bon courage !