

Corrigé et barème – Dérivation — nombre dérivé et tangente

Taux de variation, limite et tangente à une courbe (programme de 1re Spécialité)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Taux de variation et nombre dérivé

(4 pts)

- a) $f(0) = -2, f(5) = -25 + 30 - 2 = 3$: taux $= \frac{3-(-2)}{5-0} = \frac{5}{5} = 1$. (1)
- b) $f(4) = -16 + 24 - 2 = 6$; $f(4+h) = -(16+8h+h^2) + 24+6h-2 = 6-2h-h^2$; taux $= \frac{-2h-h^2}{h} = -2-h$. (1)
- c) Quand $h \rightarrow 0, -2-h \rightarrow -2$: limite finie, donc f dérivable en 4 et $f'(4) = -2$. (1)
- d) $y = -2(x-4) + 6 = -2x + 8 + 6$, soit $y = -2x + 14$. (1)

Erreur fréquente — Le signe moins devant $(4+h)^2$ s'applique aux trois termes du développement :
 $-(16+8h+h^2) = -16-8h-h^2$.

Exercice 2 – Dérivées usuelles et tangentes

(4 pts)

- a) $f(5) = 125, f'(5) = 3 \times 25 = 75$: $y = 75(x-5) + 125 = 75x - 250$. (1)
- b) $g(-1) = -1, g'(-1) = -\frac{1}{1} = -1$: $y = -(x+1) - 1 = -x - 2$. (1)
- c) $r(36) = 6, r'(36) = \frac{1}{12}$: $y = \frac{1}{12}(x-36) + 6 = \frac{1}{12}x + 3$. (1)
- d) $\sqrt{36,6} \approx 6 + \frac{0,6}{12} = 6,05$ (calculatrice : 6,0498). (1)

Repère — Le point de contact vérifie toujours l'équation de la tangente : remplacer x par a doit redonner $f(a)$.

Exercice 3 – Calcul par la définition et tangente horizontale

(4 pts)

- a) $f(2) = 12 - 10 + 1 = 3$; $f(2+h) = 3(4+4h+h^2) - 5(2+h) + 1 = 12 + 12h + 3h^2 - 10 - 5h + 1 = 3 + 7h + 3h^2$; taux $= \frac{7h+3h^2}{h} = 7 + 3h$. (1)
- b) $\lim_{h \rightarrow 0} (7 + 3h) = 7$, donc $f'(2) = 7$. (1)
- c) $y = 7(x-2) + 3 = 7x - 11$. (1)
- d) $f(a+h) - f(a) = 3(2ah+h^2) - 5h = h(6a-5+3h)$, taux $= 6a-5+3h \rightarrow 6a-5$, donc $f'(a) = 6a-5$. Tangente horizontale $\Leftrightarrow 6a-5=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{6}$; $f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{75}{36} - \frac{150}{36} + \frac{36}{36} = -\frac{39}{36} = -\frac{13}{12}$. Point $\left(\frac{5}{6}; -\frac{13}{12}\right)$. (1)

Le point clé — Après développement, $f(a+h) - f(a)$ se factorise toujours par h ; si ce n'est pas le cas, il y a une erreur de calcul.

Exercice 4 – Dérivabilité et pièges

(4 pts)

- a) $f(3) = 0, f(3+h) = |2h|$; taux $= \frac{|2h|}{h} : 2$ si $h > 0, -2$ si $h < 0$. Pas de limite : f n'est pas dérivable en 3 (point anguleux). (1)
- b) Faux. Contre-exemple : $f(x) = (x-1)^2 + 5$; $f(1+h) - f(1) = h^2$, taux $= h \rightarrow 0$, donc $f'(1) = 0$, mais $f(1) = 5 \neq 0$. (1)
- c) Tangente en a : $y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2$. Passe par K : $-3 = 2a - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a-3)(a+1) = 0$. Deux tangentes : $a = 3$ donne $y = 6x - 9$; $a = -1$ donne $y = -2x - 1$. (1)
- d) Le taux entre -1 et 2 vaut bien $\frac{8-(-1)}{3} = 3$, mais c'est une pente moyenne, pas le nombre dérivé au milieu de l'intervalle. Valeur exacte : $u'(\frac{1}{2}) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. (1)

Attention — L'égalité « taux moyen = nombre dérivé au milieu » n'est vraie que pour les fonctions polynômes de degré au plus 2 ; elle est fausse en général.

Exercice 5 – Problème : hauteur d'une balle

(4 pts)

- a) $h(1) = -5 + 12 + 1 = 8$ m ; $h(0) = 1$ m ; vitesse moyenne $= \frac{8-1}{1-0} = 7$ m/s. (1)
- b) $h(1+k) = -5(1+2k+k^2) + 12 + 12k + 1 = -5 - 10k - 5k^2 + 13 + 12k = 8 + 2k - 5k^2$; donc $h(1+k) - h(1) = 2k - 5k^2$. (1)
- c) Taux $= \frac{2k-5k^2}{k} = 2 - 5k \rightarrow 2$: $v(1) = h'(1) = 2$ m/s (la balle monte encore, lentement). (1)
- d) $h(t+k) - h(t) = -5(2tk + k^2) + 12k = k(-10t - 5k + 12)$, taux $\rightarrow -10t + 12$: $v(t) = -10t + 12$. Hauteur maximale quand $v(t) = 0$, soit $t = 1,2$ s ; $h(1,2) = -7,2 + 14,4 + 1 = 8,2$ m. (1)

Astuce — Au sommet de la trajectoire, la vitesse instantanée est nulle : la tangente à la courbe de h y est horizontale.