Calcul de dérivées

Fiche méthode

(Spécialité maths 1re · Analyse · Dérivation)

La démarche pour calculer une dérivée

1. J'écris l'intervalle où la fonction est dérivable : racine carrée → contenu strictement positif ; dénominateur → non nul.

2. Je repère l'opération principale : somme, produit, inverse ou quotient. Je prépare l'écriture si besoin ($\frac{k}{x^n} = kx^{-n}$).

3. J'écris u, u', v, v' à part, puis j'applique la formule.

4. Je simplifie (numérateur réduit, même dénominateur) et je contrôle sur une valeur ou en développant.

Le réflexe — une dérivée de quotient sans la phrase « le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle » est incomplète : c'est la condition de la formule.

Cas 1 · À partir de la définition

Réflexe — f(a + h) − f(a), je développe, je simplifie le taux par h, puis je fais tendre h vers 0.

Exemple. Questions types : « Calculer le taux de variation entre a et $a+h$ », « Démontrer que f est dérivable et donner $f'(a)$ ». Exemple : $f(x) = -x^2 + 2x$.

$f(a+h) - f(a) = -(a+h)^2 + 2(a+h) + a^2 - 2a = -2ah - h^2 + 2h$.

Pour $h \neq 0$, le taux vaut $-2a + 2 - h$.

Quand h tend vers 0, il tend vers $-2a + 2$: f est dérivable en tout a et $f'(a) = -2a + 2$.

Attention — pour |x| en 0, le taux vaut 1 si h > 0 et −1 si h < 0 : pas de limite, pas de dérivabilité.

Cas 2 · Somme de fonctions usuelles

Réflexe — je réécris k/xⁿ = k x⁻ⁿ, je sors les constantes, je dérive terme à terme.

Exemple. Questions types : « Calculer $f'(x)$ ». Exemple : $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x} + 5\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

$f(x) = 3x^4 - 2x^{-1} + 5\sqrt{x}$, somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

$f'(x) = 12x^3 - 2 \times (-x^{-2}) + \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 12x^3 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

Attention — l'exposant baisse de 1 : (x⁻²)′ = −2x⁻³ ; une constante (π², √5) a une dérivée nulle.

Cas 3 · Produit

Réflexe — u, u′, v, v′ à part ; (uv)′ = u′v + uv′ ; même dénominateur s'il y a une racine.

Exemple. Questions types : « Montrer que $f'(x) = \ldots$ ». Exemple : $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

$u(x) = x^2 - 1$, $u'(x) = 2x$; $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$.

Comme $2x\sqrt{x} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}}$: $f'(x) = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$.

Attention — $(uv)'$ n'est pas $u'v'$: $x \times x$ a pour dérivée $2x$, pas 1.

Cas 4 · Quotient

Réflexe — je justifie $v \neq 0$, puis $(u'v - uv')/v^2$, numérateur développé et réduit.

Exemple. Questions types : « Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ ». Exemple : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$.

$x^2 + 2 \geqslant 2$ ne s'annule pas. $u'(x) = 2$, $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+2) - (2x-1) \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2 + 4 - 4x^2 + 2x}{(x^2+2)^2}.$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{(x^2+2)^2}.$$

Attention — numérateur $u'v - uv'$ dans cet ordre ; parenthèses autour de u avant de soustraire.

Cas 5 · Formules combinées, ensemble de dérivabilité

Réflexe — je cherche les valeurs interdites (dénominateur nul, $x \leq 0$ sous la racine), puis l'opération principale, et je dérive chaque morceau à part.

Exemple. Questions types : « Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable, puis calculer $f'(x)$ ». Exemple : $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$.

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ s'annule en -1 et en 1 : f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[$, sur $]-1\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

$u'(x) = 1$, $v'(x) = 2x$: $f'(x) = \dfrac{(x^2-1) - (x-2) \times 2x}{(x^2-1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2 + 4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x^2-1)^2}.$$

Attention — $\sqrt{x}$ est définie en 0 mais pas dérivable : une fonction qui contient $\sqrt{x}$ se dérive sur $]0\,;\ldots[$ seulement.

Les pièges

- Définie ne veut pas dire dérivable : $|x|$ en 0, $\sqrt{x}$ en 0.
- $(uv)' \neq u'v'$ et $(u/v)' \neq u'/v'$.
- Pour k/x, pas de formule du quotient : $(k/x)' = -k/x^2$.
- Dans le quotient, le dénominateur est v^2, pas v.
- On ne remplace h par 0 qu'après avoir simplifié le taux par h.
- Un dénominateur du second degré : chercher ses racines (discriminant) avant d'écrire l'intervalle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).