

Devoir surveillé – Dérivation — fonctions dérivées et applications

Fonctions dérivées des fonctions usuelles, opérations sur les dérivées, variations et extremums —
programme de 1re spécialité maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs de dérivées

(4 pts)

- a) a) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 6x - 9$ sur $\mathbb{R}$ c) c) $h(x) = (x - 4)(x^2 + 2)$ sur $\mathbb{R}$ (dériver comme un produit)
- b) b) $g(x) = 8\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$ d) d) $k(x) = \frac{3x + 2}{x + 5}$ sur $] - 5; +\infty[$ (donner un seul quotient)

Exercice 2 – Tableau de variations d’une fonction du troisième degré

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer $f'(x)$.
- b) b) Montrer que $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$ et étudier son signe.
- c) c) Dresser le tableau de variations de f (avec les valeurs de f en -1 et en 3).
- d) d) Un élève affirme : « Sur $[-2; 6]$, le maximum de f vaut 9 puisque f' change de signe en -1 . » A-t-il raison ? Expliquer.

Exercice 3 – Une inégalité par l’étude d’un quotient

(4 pts)

- a) Soit $f(x) = \frac{x^2 + 9}{2x}$ sur $]0; +\infty[$.
a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{2x^2}$.
- b) b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- c) c) Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.
- d) d) En déduire que pour tout $x > 0$, $x^2 + 9 \geq 6x$. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?

Exercice 4 – Optimisation : la boîte sans couvercle

(4 pts)

- a) On fabrique une boîte à base carrée de côté x cm et de hauteur h cm, sans couvercle, avec exactement 1200 cm^2 de carton (base + 4 faces).
a) Montrer que $h = \frac{1200 - x^2}{4x}$ et préciser l’intervalle des valeurs possibles de x .
- b) b) Montrer que le volume de la boîte vaut $V(x) = 300x - \frac{x^3}{4}$.
- c) c) Calculer $V'(x)$, la factoriser et dresser le tableau de variations de V .
- d) d) Donner les dimensions de la boîte de volume maximal et ce volume.

Exercice 5 – Parité et méthode de Newton*(4 pts)*

- a) Soit $h(x) = x^2 - 37$ sur $\mathbb{R}$.
- a) Montrer que h est paire. En déduire que si α est solution de $h(x) = 0$, alors $-\alpha$ l'est aussi.
- b) b) Calculer $h'(x)$ et donner une équation de la tangente T à la courbe de h au point d'abscisse $x_0 = 6$.
- c) c) Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de T avec l'axe des abscisses (valeur exacte, puis arrondie à 10^{-4}).
- d) d) Calculer $x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)}$ arrondi à 10^{-4} . Quel nombre la suite $x_0, x_1, x_2 \dots$ approche-t-elle ?

Bon courage !