

Corrigé et barème – Dérivation — fonctions dérivées et applications

Fonctions dérivées des fonctions usuelles, opérations sur les dérivées, variations et extremums — programme de 1re spécialité maths

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Calculs de dérivées

(4 pts)

- a) $f'(x) = 8x^3 - 3x^2 + 6$ (1)
 b) $g'(x) = \frac{8}{2\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}}$ (1)
 c) $h'(x) = 1 \times (x^2 + 2) + (x - 4) \times 2x = 3x^2 - 8x + 2$ (1)
 d) $k'(x) = \frac{3(x+5) - (3x+2) \times 1}{(x+5)^2} = \frac{13}{(x+5)^2}$ (1)

Erreur fréquente — Dans un produit ou un quotient, on ne dérive jamais chaque facteur séparément : $u'v + uv'$ et $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, dans cet ordre.

Exercice 2 – Tableau de variations d'une fonction du troisième degré

(4 pts)

- a) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. (1)
 b) $3(x - 3)(x + 1) = 3(x^2 + x - 3x - 3) = 3x^2 - 6x - 9 = f'(x)$. Racines -1 et 3 , coefficient positif : $f'(x) > 0$ sur $] -\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$ sur $] -1 ; 3[$. (1)
 c) $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 4 = 9$; $f(3) = 27 - 27 - 27 + 4 = -23$. f croissante sur $] -\infty ; -1]$, décroissante sur $[-1 ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$; maximum local 9 en -1 , minimum local -23 en 3 . (1)
 d) Non : 9 est un maximum local. Sur $[-2 ; 6]$, f est croissante sur $[3 ; 6]$ et $f(6) = 216 - 108 - 54 + 4 = 58 > 9$. Le maximum sur $[-2 ; 6]$ vaut 58 , atteint au bord en $x = 6$ (et $f(-2) = 2$). (1)

Le point clé — Un extremum local se lit au changement de signe de f' , mais l'extremum global sur un intervalle fermé se cherche aussi aux bornes.

Exercice 3 – Une inégalité par l'étude d'un quotient

(4 pts)

- a) $u = x^2 + 9$, $u' = 2x$, $v = 2x$, $v' = 2$: $f'(x) = \frac{2x \times 2x - (x^2 + 9) \times 2}{(2x)^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 18}{4x^2} = \frac{2x^2 - 18}{4x^2} = \frac{x^2 - 9}{2x^2}$. (1)
 b) $2x^2 > 0$; $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ a, pour $x > 0$, le signe de $x - 3$: $f'(x) < 0$ sur $]0 ; 3[$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ sur $]3 ; +\infty[$. (1)
 c) f décroissante sur $]0 ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$; minimum $f(3) = \frac{9+9}{6} = 3$ atteint en $x = 3$. (1)
 d) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 3$, soit $\frac{x^2+9}{2x} \geq 3$; comme $2x > 0$, on multiplie sans changer le sens : $x^2 + 9 \geq 6x$. Égalité pour $x = 3$ seulement (c'est $(x - 3)^2 \geq 0$). (1)

Astuce — Pour démontrer une inégalité, on étudie la fonction différence ou quotient et on lit son minimum dans le tableau de variations.

Exercice 4 – Optimisation : la boîte sans couvercle

(4 pts)

- a) Aire de carton : $x^2 + 4xh = 1200$, donc $h = \frac{1200-x^2}{4x}$. Il faut $x > 0$ et $h > 0$, soit $x^2 < 1200$: $x \in]0 ; \sqrt{1200}[$, avec $\sqrt{1200} = 20\sqrt{3} \approx 34,6$. (1)
- b) $V(x) = x^2h = x^2 \times \frac{1200-x^2}{4x} = \frac{x(1200-x^2)}{4} = 300x - \frac{x^3}{4}$. (1)
- c) $V'(x) = 300 - \frac{3x^2}{4} = \frac{3(400-x^2)}{4} = \frac{3(20-x)(20+x)}{4}$. Sur $]0 ; 20\sqrt{3}[$, $20+x > 0$: $V'(x) > 0$ pour $x < 20$, $V'(x) < 0$ pour $x > 20$. V croissante sur $]0 ; 20]$, décroissante sur $[20 ; 20\sqrt{3}[$. (1)
- d) Maximum en $x = 20$ cm ; $h = \frac{1200-400}{80} = 10$ cm ; $V(20) = 6000 - 2000 = 4000$ cm³ (4 litres). (1)

Repère — En optimisation, la contrainte (ici l'aire de carton) sert à éliminer une inconnue pour obtenir une fonction d'une seule variable, avec son intervalle.

Exercice 5 – Parité et méthode de Newton

(4 pts)

- a) $h(-x) = (-x)^2 - 37 = x^2 - 37 = h(x)$: h est paire. Si $h(\alpha) = 0$ alors $h(-\alpha) = h(\alpha) = 0$: les solutions sont opposées deux à deux. (1)
- b) $h'(x) = 2x$; $h(6) = -1$, $h'(6) = 12$; $T : y = 12(x - 6) - 1 = 12x - 73$. (1)
- c) $12x - 73 = 0 \iff x = \frac{73}{12}$, soit $x_1 \approx 6,0833$. (1)
- d) $h(x_1) = \frac{5329}{144} - 37 = \frac{1}{144} \approx 0,0069$; $h'(x_1) = \frac{73}{6} \approx 12,1667$; $x_2 \approx 6,08333 - 0,00057 \approx 6,0828$. La suite approche $\sqrt{37} \approx 6,08276$, solution positive de $x^2 = 37$; en partant de $x_0 = -6$ on obtiendrait $-\sqrt{37}$ par symétrie. (1)

À retenir — Newton remplace la courbe par sa tangente : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, la valeur de la fonction au numérateur et la pente au dénominateur.