

Corrigé et barème – Combinatoire et dénombrement

Principes de comptage, arrangements, permutations et combinaisons — Probabilités et statistiques (1re Spécialité Maths)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Exercice 1 — Emprunts à la médiathèque (principes de comptage) (4 pts)

- a) Trois étapes indépendantes : $8 \times 5 \times 6 = 240$ façons. (1)
- b) Trois cas disjoints : $8 + 5 + 6 = 19$ façons. (1)
- c) Trois cas disjoints : $8 \times 5 + 8 \times 6 + 5 \times 6 = 40 + 48 + 30 = 118$ façons. (1)
- d) Partie à 3 éléments parmi 19 : $\binom{19}{3} = \frac{19 \times 18 \times 17}{6} = 969$ façons. (1)

Repère — On multiplie sur des étapes successives et on additionne sur des cas deux à deux disjoints : identifier lequel des deux s'applique est le premier travail de tout dénombrement.

Exercice 2 – Exercice 2 — Course à pied (l'ordre compte) (4 pts)

- a) 3-uplet de concurrents distincts : $11 \times 10 \times 9 = 990$ podiums. (1)
- b) Permutation des 11 concurrents : $11! = 39\,916\,800$ classements. (1)
- c) On choisit la place de A (3 possibilités), puis les deux autres places parmi les 10 concurrents restants : $3 \times 10 \times 9 = 270$ podiums. (1)
- d) Il multiplie par 3 le nombre total de podiums ; or $990 \times 3 = 2\,970$ dépasse déjà le nombre de podiums existants. La place de A doit être choisie *parmi* les trois places du podium, et non ajoutée. (1)

Erreur fréquente — Quand un élément est imposé, on lui attribue d'abord sa place, puis on complète avec les éléments restants : on ne multiplie jamais le total par le nombre de places.

Exercice 3 – Exercice 3 — Groupes de travail (combinaisons) (4 pts)

- a) $\binom{18}{5} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14}{120} = 8\,568$ groupes. (1)
- b) $\binom{10}{3} \times \binom{8}{2} = 120 \times 28 = 3\,360$ groupes. (1)
- c) Aucun garçon : $\binom{10}{5} = 252$; exactement un garçon : $8 \times \binom{10}{4} = 8 \times 210 = 1\,680$. Total : $252 + 1\,680 = 1\,932$ groupes. (1)
- d) Groupes non mixtes : $\binom{10}{5} + \binom{8}{5} = 252 + 56 = 308$. Groupes mixtes : $8\,568 - 308 = 8\,260$, soit $\frac{8\,260}{8\,568} \approx 0,964 > 0,96$. (1)

Le point clé — « Au plus un » se découpe en cas disjoints, « au moins un de chaque » se traite par complémentaire : choisir la bonne décomposition évite tout double comptage.

Exercice 4 – Exercice 4 — Triangle de Pascal et coefficients binomiaux (4 pts)

- a) Ligne $n = 7$: 1 ; 7 ; 21 ; 35 ; 35 ; 21 ; 7 ; 1. (1)
- b) Chaque coefficient est la somme des deux situés au-dessus : 1 ; 8 ; 28 ; 56 ; 70 ; 56 ; 28 ; 8 ; 1. (1)
- c) $1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256 = 2^8$: c'est le nombre de parties d'un ensemble à 8 éléments, chaque partie étant comptée une fois selon son nombre d'éléments. (1)
- d) $\frac{n(n-1)}{2} = 105$ donne $n^2 - n - 210 = 0$, de discriminant $\Delta = 841 = 29^2$. Les racines sont -14 et 15 ; la seule solution entière naturelle est $n = 15$. (1)

À retenir — La relation de Pascal permet de produire une ligne entière sans aucune factorielle, et la somme d'une ligne vaut toujours 2^n .

Exercice 5 – Exercice 5 — Une main de quatre cartes (4 pts)

- a) Tirage simultané, sans ordre : $\binom{32}{4} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{24} = 35\,960$ mains. (1)
- b) $\binom{4}{2} \times \binom{28}{2} = 6 \times 378 = 2\,268$ mains. (1)
- c) On choisit 4 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as : $\binom{28}{4} = 20\,475$ mains. (1)
- d) Par complémentaire : $P = 1 - \frac{20\,475}{35\,960} = \frac{15\,485}{35\,960} \approx 0,43$. (1)

Attention — « Au moins un as » ne se calcule jamais en multipliant par 4 le nombre de mains contenant un as désigné : seul le passage au complémentaire évite de compter deux fois les mains à plusieurs as.