

Devoir surveillé – Variables aléatoires

Loi de probabilité, espérance et écart-type (programme de Mathématiques 1ère, sans spé)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Exercice 1 — Un sac de jetons (4 pts)

- a) a) Un sac contient 12 jetons : cinq portent le numéro 1, quatre le numéro 3, deux le numéro 6 et un le numéro 10. On tire un jeton au hasard et on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) b) Calculer $P(X \geq 3)$.
- c) c) Calculer $E(X)$.
- d) d) Le tirage coûte 3 € et l'on reçoit en euros le numéro du jeton tiré. Le jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

Exercice 2 – Exercice 2 — Espérance, variance, écart-type (4 pts)

La variable aléatoire X prend les valeurs $-4, 0, 5$ et 12 avec les probabilités respectives $0,15 ; 0,35 ; 0,30$ et $0,20$.

- a) a) Calculer $E(X)$.
- b) b) Calculer $E(X^2)$.
- c) c) En déduire $V(X)$ puis $\sigma(X)$, arrondi au centième.
- d) d) On pose $Y = 2X - 5$. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 3 – Exercice 3 — La roue du forain (4 pts)

Une roue comporte 10 secteurs identiques : cinq ne rapportent rien, quatre rapportent 6 € et un rapporte 15 €. Pour jouer, il faut miser 4 €. On note X le gain algébrique du joueur.

- a) a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) b) Calculer $E(X)$ et dire si le jeu est équitable.
- c) c) Le forain organise 250 parties dans la journée. Quel bénéfice peut-il espérer ?
- d) d) Déterminer la mise qui rendrait le jeu équitable.

Exercice 4 – Exercice 4 — Facturation d'impressions (4 pts)

Un service d'impression facture 0,12 € par page, plus un abonnement mensuel de 4,50 €. Pour un client pris au hasard, le nombre N de pages imprimées dans le mois vérifie $E(N) = 180$ et $\sigma(N) = 45$. On note C le montant facturé, en euros.

- a) a) Exprimer C en fonction de N , puis calculer $E(C)$.
- b) b) Calculer $V(C)$ et $\sigma(C)$.
- c) c) Un élève écrit : « $\sigma(C) = 0,12 \times 45 + 4,50 = 9,90$ € ». Expliquer son erreur.
- d) d) Le service veut porter la facture moyenne à 30 € en gardant l'abonnement à 4,50 €. Déterminer le nouveau prix par page, au centime près.

Exercice 5 – Exercice 5 — Deux machines à café*(4 pts)*

Une entreprise loue une machine à café. Avec l'option A, le coût mensuel d'entretien X , en euros, vaut 0 avec la probabilité 0,7 ; 90 avec la probabilité 0,2 ; 300 avec la probabilité 0,1. Avec l'option B, l'entretien est assuré pour un forfait fixe de 55 € par mois.

- a) a) Calculer $E(X)$.
- b) b) Montrer que $\sigma(X) \approx 91,2$ €.
- c) c) Comparer les deux options du point de vue du coût moyen.
- d) d) Expliquer pourquoi une petite entreprise peut malgré tout préférer l'option B.

Bon courage !