

Corrigé et barème – Variables aléatoires

Loi de probabilité, espérance et écart-type (programme de Mathématiques 1ère, sans spé)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Mathématiques 1^{re}

Exercice 1 – Exercice 1 — Un sac de jetons

(4 pts)

- a) $P(X = 1) = \frac{5}{12}$, $P(X = 3) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(X = 6) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, $P(X = 10) = \frac{1}{12}$; somme = $\frac{12}{12} = 1$. (1)
- b) $P(X \geq 3) = \frac{4}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \approx 0,583$. (1)
- c) $E(X) = \frac{5 \times 1 + 4 \times 3 + 2 \times 6 + 1 \times 10}{12} = \frac{5 + 12 + 12 + 10}{12} = \frac{39}{12} = 3,25$. (1)
- d) Le gain algébrique est $G = X - 3$, donc $E(G) = 3,25 - 3 = 0,25 > 0$: le jeu est favorable au joueur, qui gagne en moyenne 25 centimes par partie. (1)

Repère — Une loi donnée par des effectifs se lit en fractions : on garde $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{12} \dots$ plutôt que des décimaux arrondis, et le total doit faire 1.

Exercice 2 – Exercice 2 — Espérance, variance, écart-type

(4 pts)

- a) $E(X) = -4 \times 0,15 + 0 \times 0,35 + 5 \times 0,30 + 12 \times 0,20 = -0,6 + 1,5 + 2,4 = 3,3$. (1)
- b) $E(X^2) = 16 \times 0,15 + 0 + 25 \times 0,30 + 144 \times 0,20 = 2,4 + 7,5 + 28,8 = 38,7$. (1)
- c) $V(X) = 38,7 - 3,3^2 = 38,7 - 10,89 = 27,81$ et $\sigma(X) = \sqrt{27,81} \approx 5,27$. (1)
- d) $E(Y) = 2 \times 3,3 - 5 = 1,6$; $\sigma(Y) = |2| \times 5,27 \approx 10,55$ (le -5 n'intervient pas). (1)

Erreur fréquente — La valeur 0 a une probabilité non nulle : elle ne contribue ni à $E(X)$ ni à $E(X^2)$, mais elle doit figurer dans le total des probabilités.

Exercice 3 – Exercice 3 — La roue du forain

(4 pts)

- a) Gains algébriques : $0 - 4 = -4$ (probabilité 0,5), $6 - 4 = 2$ (probabilité 0,4), $15 - 4 = 11$ (probabilité 0,1). (1)
- b) $E(X) = -4 \times 0,5 + 2 \times 0,4 + 11 \times 0,1 = -2 + 0,8 + 1,1 = -0,1 \text{ €}$: $E(X) \neq 0$, le jeu n'est pas équitable (il est défavorable au joueur). (1)
- c) Le joueur perd en moyenne 0,10 € par partie, donc le forain gagne $250 \times 0,10 = 25 \text{ €}$. (1)
- d) Espérance des gains bruts : $\frac{0 \times 5 + 6 \times 4 + 15 \times 1}{10} = \frac{39}{10} = 3,90 \text{ €}$; la mise équitable est donc de 3,90 €. (1)

À retenir — Le gain algébrique retranche la mise à *chaque* issue, y compris aux issues perdantes : la valeur -4 ne doit jamais être remplacée par 0.

Exercice 4 – Exercice 4 — Facturation d'impressions

(4 pts)

- a) $C = 0,12N + 4,50$, donc $E(C) = 0,12 \times 180 + 4,50 = 21,60 + 4,50 = 26,10 \text{ €}$. (1)
- b) $V(N) = 45^2 = 2025$, donc $V(C) = 0,12^2 \times 2025 = 0,0144 \times 2025 = 29,16$ et $\sigma(C) = 0,12 \times 45 = 5,40 \text{ €}$. (1)
- c) Il ajoute la constante à un écart-type. Or $\sigma(aN + b) = |a|\sigma(N)$: l'abonnement, payé par tous les clients, décale la facture sans créer de dispersion, donc il n'apparaît pas dans $\sigma(C)$. (1)
- d) Avec un prix p par page : $180p + 4,50 = 30$, soit $180p = 25,50$ et $p = \frac{25,50}{180} \approx 0,1417 \text{ €}$, soit environ 0,14 € la page. (1)

Attention — Quand l'énoncé fournit σ et non V , il faut élever au carré avant d'appliquer $V(aX + b) = a^2V(X)$ — ou rester sur la formule des écarts-types.

Exercice 5 – Exercice 5 — Deux machines à café*(4 pts)*

- a) $E(X) = 0 \times 0,7 + 90 \times 0,2 + 300 \times 0,1 = 18 + 30 = 48$ €. (1)
- b) $E(X^2) = 8\,100 \times 0,2 + 90\,000 \times 0,1 = 1\,620 + 9\,000 = 10\,620$; $V(X) = 10\,620 - 48^2 = 10\,620 - 2\,304 = 8\,316$ et $\sigma(X) = \sqrt{8\,316} \approx 91,2$ €. (1)
- c) L'option A coûte en moyenne 48 € par mois, contre 55 € pour l'option B : en moyenne, A est moins chère de 7 € par mois, soit 84 € par an. (1)
- d) L'option B a un écart-type nul (le coût est toujours 55 €), alors que l'option A a un écart-type de 91,2 € : un mois sur dix, la facture atteint 300 €. B garantit un budget prévisible ; les 7 € mensuels supplémentaires sont le prix de cette sécurité. (1)

Le point clé — Comparer deux options, c'est comparer les espérances *et* les écarts-types : une espérance plus basse assortie d'un grand écart-type signifie un risque plus élevé.