Suites géométriques et croissance exponentielle

Fiche méthode

(Maths 1re (tronc commun) · Phénomènes d'évolution · Variation exponentielle)

La démarche pour une question de suite géométrique

1. Je traduis l'énoncé : quel est le premier terme (u_0 ou u_1), que représente n (mois, année, étape), par quel nombre on multiplie à chaque étape (un pourcentage se traduit en coefficient multiplicateur).

2. Je reconnais la suite : relation $u_{n+1} = q \times u_n$, ou quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ constant calculé avec la lettre n.

3. J'écris le terme de rang n $u_n = u_0 \times q^n$ (ou $u_1 \times q^{n-1}$) et je calcule le terme demandé.

4. Je conclus : sens de variation en comparant q à 1, seuil avec un tableau de puissances et deux rangs vérifiés, réponse par une phrase dans le contexte.

Le réflexe — repérer le rang du premier terme et traduire chaque pourcentage en coefficient multiplicateur : le terme, le sens de variation et le seuil en dépendent.

Cas 1 · Coefficient multiplicateur et évolutions successives

Réflexe — taux → coefficient (1 + t/100 ou 1 − t/100), produit des coefficients, puis retour au taux : (CM − 1) × 100.

Exemple. Exemple : un prix augmente de 15 %, puis baisse de 20 %. Quelle est l'évolution globale ?

$CM = 1{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}92$.

$0{,}92 - 1 = -0{,}08$: le prix a baissé de 8 % (et non de 5 %).

Attention — une baisse de 20 % se traduit par × 0,8 ; les taux ne s'additionnent pas.

Cas 2 · Montrer qu'une suite est géométrique (ou qu'elle ne l'est pas)

Réflexe — u(n+1) ÷ u(n) calculé en gardant n : constant → géométrique de raison ce nombre ; deux quotients différents → elle ne l'est pas.

Exemple. Exemple : $u_n = 3 \times 4^n$ et $z_n = n^2 + 1$. Ces suites sont-elles géométriques ?

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4$: constant, (u_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $u_0 = 3$.

$z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $z_2 = 5$: $\dfrac{z_1}{z_0} = 2$ et $\dfrac{z_2}{z_1} = 2{,}5$ sont différents, (z_n) n'est pas géométrique.

Attention — « les premiers quotients sont égaux » ne démontre rien ; seul le calcul avec la lettre n permet de conclure.

Cas 3 · Terme de rang n, deux termes connus

Réflexe — u(n) = u(p) × q^(n − p) ; avec deux termes, q^(n − p) = u(n) ÷ u(p) et q > 0.

Exemple. Exemple : (u_n) est géométrique à termes positifs, $u_2 = 18$ et $u_4 = 40{,}5$. Calculer q, u_0 et u_5.

$q^2 = \dfrac{40{,}5}{18} = 2{,}25$ et $q > 0$, donc $q = 1{,}5$.

$u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \dfrac{18}{2{,}25} = 8$, d'où $u_n = 8 \times 1{,}5^n$.

$u_5 = u_4 \times q = 40{,}5 \times 1{,}5 = 60{,}75$.

Attention — si le premier terme donné est u(1), le terme de rang n est u(1) × q^(n − 1).

Cas 4 · Évolution à taux constant, intérêts composés

Réflexe — + t % par période : raison 1 + t/100 ; − t % : raison 1 − t/100 ; puis u(n) = u(0) × qˆn et taux global (qˆn − 1) × 100.

Exemple. Exemple : 1 500 € sont placés à 3 % par an à intérêts composés. Capital au bout de 2 ans et taux global ?

$C_n = 1\,500 \times 1{,}03^n$: suite géométrique de raison 1,03.
$1{,}03^2 = 1{,}0609$, donc $C_2 = 1\,500 \times 1{,}0609 = 1\,591{,}35$ €.
Taux global : +6,09 % ; à intérêts simples, on aurait 1 500 + 2 × 45 = 1 590 €.

Attention — la raison d'une baisse de t % est 1 − t/100, jamais t/100.

Cas 5 · Sens de variation et représentation graphique

Réflexe — termes positifs : q > 1 croissante, 0 < q < 1 décroissante ; sur un graphique, q = u(1) ÷ u(0).

Exemple. Exemple : $u_n = 40 \times 0{,}95^n$. Démontrer son sens de variation.

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 0{,}95\,u_n - u_n = -0{,}05\,u_n$.
Comme $u_n > 0$, la différence est strictement négative : (u_n) est strictement décroissante (baisse de 5 % par étape).

Attention — les points (n ; u(n)) d'une suite géométrique ne sont pas alignés, et on ne les relie pas.

Cas 6 · Problème de seuil

Réflexe — u(0) × qˆn > A ⟺ qˆn > A ÷ u(0) ; premier rang qui convient, vérification sur le rang précédent.

Exemple. Exemple : plus petit entier n tel que $50 \times 3^n > 10\,000$.

$50 \times 3^n > 10\,000 \iff 3^n > 200$.
$3^4 = 81$ et $3^5 = 243$: le plus petit entier est $n = 5$.
Vérification : $50 \times 81 = 4\,050$ et $50 \times 243 = 12\,150$.

Attention — une valeur approchée juste en dessous du seuil (1,999 pour 2) ne convient pas.

Les pièges

- Traduire une baisse de 20 % par × 0,2 au lieu de × 0,8.
- Additionner des taux successifs au lieu de multiplier les coefficients.
- Confondre u(0) et u(1) : avec u(1), le terme de rang n est u(1) × qˆ(n − 1).
- Écrire (u(0) × q)ˆn au lieu de u(0) × qˆn.
- Confondre ajouter (suite arithmétique) et multiplier (suite géométrique) : + 30 € par mois n'est pas + 3 % par mois.
- Conclure « géométrique » à partir de deux ou trois quotients égaux, sans calcul avec n.
- Arrondir un seuil à l'entier le plus proche, ou oublier de vérifier le rang précédent.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).