Suites arithmétiques et croissance linéaire

Fiche méthode

(Maths 1re (tronc commun) · Phénomènes d'évolution · Variation linéaire)

La démarche pour une question de suite arithmétique

1. Je traduis l'énoncé : quel est le premier terme (u_0 ou u_1), que représente n (mois, année, étape), quelle quantité s'ajoute ou se retire à chaque étape.

2. Je reconnais la suite : relation $u_{n+1} = u_n + r$, ou différence $u_{n+1} - u_n$ constante calculée avec la lettre n.

3. J'écris la forme explicite $u_n = u_0 + nr$ (ou $u_1 + (n-1)r$) et je calcule le terme demandé.

4. Je conclus : sens de variation par le signe de r, seuil par une inéquation et deux rangs vérifiés, réponse par une phrase dans le contexte.

Le réflexe — repérer le rang du premier terme et ce que représente n : le terme, l'année et le seuil en dépendent.

Cas 1 · Fonction affine et coefficient directeur

Réflexe — m = différence des images sur différence des antécédents, puis p avec un point connu ; le signe de m donne le sens de variation.

Exemple. Exemple : f est affine, $f(2) = 11$ et $f(6) = 3$. Déterminer $f(x)$ et le sens de variation de f.

$m = \dfrac{3 - 11}{6 - 2} = \dfrac{-8}{4} = -2$.

$f(2) = -2 \times 2 + p = 11$, donc $p = 15$: $f(x) = -2x + 15$. Contrôle : $f(6) = -12 + 15 = 3$.

$m < 0$: f est strictement décroissante.

Attention — dans un tableau dont les valeurs de x vont de 2 en 2 (ou de 5 en 5), on divise la hausse par ce pas pour obtenir m.

Cas 2 · Montrer qu'une suite est arithmétique (ou qu'elle ne l'est pas)

Réflexe — u(n+1) − u(n) calculé en gardant n : constant → arithmétique de raison ce nombre ; deux écarts différents → elle ne l'est pas.

Exemple. Exemple : $w_n = 4n - 9$ et $z_n = 3n^2$. Ces suites sont-elles arithmétiques ?

$w_{n+1} = 4(n+1) - 9 = 4n - 5$, donc $w_{n+1} - w_n = 4n - 5 - (4n - 9) = 4$: constant, (w_n) est arithmétique de raison 4, de premier terme $w_0 = -9$.

$z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = 12$: $z_1 - z_0 = 3$ et $z_2 - z_1 = 9$ sont différents, (z_n) n'est pas arithmétique.

Attention — « les premiers écarts sont égaux » ne démontre rien ; seul le calcul avec la lettre n permet de conclure.

Cas 3 · Terme de rang n, deux termes connus

Réflexe — u(n) = u(p) + (n − p)r : de u(p) à u(n), on ajoute (n − p) fois la raison.

Exemple. Exemple : (u_n) est arithmétique, $u_5 = 31$ et $u_{12} = 59$. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{30}.

$u_{12} = u_5 + 7r$, donc $7r = 59 - 31 = 28$ et $r = 4$.

$u_0 = u_5 - 5r = 31 - 20 = 11$, d'où $u_n = 11 + 4n$.

$u_{30} = 11 + 4 \times 30 = 131$.

Attention — si le premier terme donné est u(1), la formule est u(n) = u(1) + (n − 1)r.

Cas 4 · Sens de variation et représentation graphique

Réflexe — signe de r pour le sens de variation ; les points (n ; u(n)) sont sur la droite y = rx + u(0).

Exemple. Exemple : $u_n = 2{,}5n - 3$. Sens de variation ? Sur quelle droite sont les points $(n\,;u_n)$?

$u_{n+1} - u_n = 2{,}5$: la suite est arithmétique de raison $2{,}5 > 0$, donc strictement croissante.

Les points sont sur la droite d'équation $y = 2{,}5x - 3$: coefficient directeur 2,5 (la raison), ordonnée à l'origine -3 (le terme u_0). Le point $(2\,;2)$ en fait partie, car $u_2 = 5 - 3 = 2$.

Attention — on ne relie pas les points, et le premier terme n'a aucune influence sur le sens de variation.

Cas 5 · Problème de seuil

Réflexe — inéquation en n, encadrement du quotient par deux multiples consécutifs, plus petit entier qui convient, vérification sur deux rangs.

Exemple. Exemple : $v_n = 1\,500 - 45n$. Déterminer le plus petit entier n tel que $v_n < 400$.

$1\,500 - 45n < 400 \iff 45n > 1\,100 \iff n > \dfrac{1\,100}{45}$.

$45 \times 24 = 1\,080$ et $45 \times 25 = 1\,125$: le plus petit entier est $n = 25$.

Vérification : $v_{24} = 1\,500 - 1\,080 = 420 \geqslant 400$ et $v_{25} = 1\,500 - 1\,125 = 375 < 400$.

Attention — en divisant par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité ; « n > 24,4 » donne 25, pas 24.

Les pièges

- Confondre u(0) et u(1) : avec u(1), la forme explicite est u(n) = u(1) + (n − 1)r.
- Prendre pour coefficient directeur la hausse d'une colonne à l'autre d'un tableau, sans diviser par le pas.
- Conclure « arithmétique » à partir de deux ou trois écarts égaux, sans calcul avec n.
- Croire qu'une suite arithmétique est toujours croissante : seul le signe de r compte.
- Confondre ajouter (suite arithmétique) et multiplier (suite géométrique) : + 40 € par mois n'est pas + 4 % par mois.
- Arrondir un seuil à l'entier le plus proche, ou oublier de vérifier le rang précédent.
- Oublier de changer le sens de l'inégalité en divisant par un nombre négatif.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).